

Wiskunde

TOETS- & EKSAMENVOORBEREIDING

Anne Eadie & Gretel Lampe

GRAAD

12

KABV

2-in-1

π



THE
ANSWER
SERIES *Your Key to Exam Success*

Graad 12 **Wiskunde** 2-in-1 KABV

TOETS- & EKSAMENVOORBEREIDING

Hierdie Graad 12 Wiskunde 2-in-1 studiegids is 'n topverkoper. Dit bied 'n unieke metode om die hele kursus in Matriekwiskunde te bemeester deur jou trappie-vir-trappie teen 'n trapleer van bereikbare vrae en antwoorde, wat deurentyd vir terugvoer en groei voorsiening maak, uit te lei.

Hierdie studiegids het TWEE duidelike afdelings:

- ONDERWERPGEBASEERDE gegradeerde vrae en oplossings – om 'n stapsgewyse deeglike begrip van teorie, tegnieke en konsepte in elke onderwerp te ontwikkel
- 14 EKSAMENVRAESTELLE met volledige oplossings, saamgestel uit vorige Nasionale en IEB-eksamens

PLUS, 'n 'NUWE UITBREIDING'-afdeling, wat bestaan uit uitdagende vrae en memo's vir Vraestel 1 en Vraestel 2. Hierdie is hoër-orde vrae, geïdentifiseer uit verslae oor die afgelope jare, wat diep wiskundige denke vereis en bevorder.

Sleutelkenmerke:

- Kritieke voorkennis (Graad 10 & 11) ingesluit
- Gedetailleerde oplossings vir ALLE vrae
- Stapsgewyse, metodiese konseptuele ontwikkeling en leiding in bewysvoering en strategie
- Nuttige studienotas en adviesraampies
- Bylaes, noodsaaklike konteksgedeeltes vir Differensiaalrekenen, Meetkunde, Trigonometrie, ens.
- Uitgebreide dekking van alle kognitiewe vlakke
- Van toepassing vir beide KABV- en IEB-kandidate

Hierdie topverkoper bied uitstekende voorbereiding vir KABV- en IEB-matrikulante regdeur die jaar en daar is al gesien hoe baie leerders hul kritieke denkvaardighede in hierdie sleutelvak verbeter en so hul verwagtinge presteer.

GRAAD

12

KABV

2-in-1

Wiskunde

Anne Eadie & Gretel Lampe

Ander Gr 12 publikasies beskikbaar

► **GRAAD 12 WISKUNDE**
DBO & IEB
OU VRAESTELLE 'TOOLKIT'

- vraestelle
- memo's
- waardevolle opsommings

ideaal vir eksamenvoorbereiding

► **GRAAD 12 WISKUNDE V & A**
10 addisionele, uitdagende
oefeneksamens & antwoorde



THE
ANSWER
SERIES *Your Key to Exam Success*

HIERDIE STUDIEGIDS SLUIT IN

1 Vrae in Onderwerpe

2 Eksamenvraestelle

Volledige oplossings word vir albei afdelings verskaf

eBoek
beskikbaar 

PLUS Vlak 3 & 4 / Uitdagende Eksamenvrae met Oplossings
(in aparte boekie)

INHOUD

BYLAES VOOR IN DIE BOEK

- Die Eksamen
- Besliste pad na sukses in Matriekwiskunde
- Die Kurrikulum (KABV): Oorsig van Onderwerpe



AFDELING 1: Onderwerpvrae & Volledige Oplossings

	Vraestel	Vrae	Opl.
	↓		
1 Algebra & Getalle; Eksponeente & Wortelvorme	1	1	54
2 Patrone & Rye	1	4	62
3 Funksies & Inverse funksies	1	8	72
4 Logs & Log funksies	1	12	79
5 Finansies, Groei & Verval	1	15	85
6 Trigonometrie Deel 1: Algemeen, insl. Saamgestelde $\angle^e$	2	19	91
Trigonometrie Deel 2: 2D & 3D probleme	2	25	104
7 Polinome (3 ^{de} graadse)	1	27	108
8 Differensiaalrekenen	1	29	110
9 Analitiese Meetkunde	2	33	120
11 Euklidiese Meetkunde: $\odot^s$, Eweredigheid & Gelykvormigh.	2	36	126
10 Statistiek & Regressie: (Eenverand. & Tweeverand. data)	2	44	135
12 Waarskynlikheid	1	50	141

AFDELING 2: Eksamenvraestelle & Memo's



ONDERWERPGIDSE: Vraestel 1 & Vraestel 2 147 & 148

	Vrae	Memo's
Vraestel A1 & A2	149	178
Vraestel B1 & B2	153	185
Vraestel C1 & C2	157	192
Vraestel D1 & D2	160	197
Vraestel E1 & E2	164	204
Vraestel F1 & F2	168	210
Vraestel G1 & G2	172	216

BYLAES AGTER IN DIE BOEK

- Boekwerk: Eksamineerbare bewyse..... i
- Trig Opsomming
- Vierhoeke Opsomming
- Groepering van Sirkelmeetkunde Stellings.....viii
- Omgekeerde Stellings in Sirkelmeetkunde.....ix
- Euklidiese Meetkunde: Stellings & Aanvaarbare Redes x
- Analitiese Meetkunde 'Toolkit'xiii
- Konkawiteit & Die Buigpunt
- Sakrekenaarinstruksiesxvii
- DBO/IEB Formule-/Inligtingsblad.....xviii

UITBREIDING: (in aparte boekie)

Vlak 3 & 4 Uitdagende Eksamenvrae & Oplossings

Uitbreiding: Vraestel 1..... 1 & Vraestel 2..... 23



FUNKSIES & INVERSE FUNKSIES

OEFENING 3.1

Eienskappe van Grafieke & Funksies

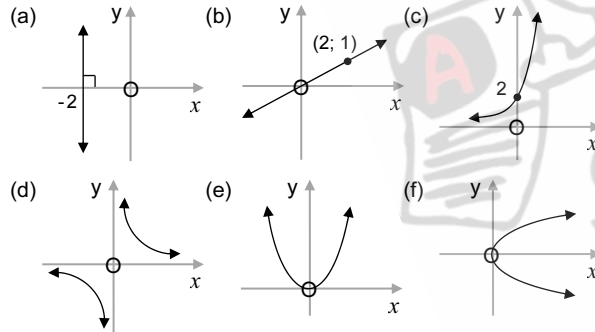
Die fokus in hierdie afdeling is *hoofsaaklik* op die parabool en die reguitlyn en, verder aan, op hul inverses (omgekeerdes). Sien Onderwerp 4 vir eksponensiaal- en log funksies en hul inverses. Sien die **Onderwerpgids** op bl. 147 & 148, vir breedvoerige hersiening van die hiperbool (geen inverse word vereis nie).

Dit is baie belangrik om die verskillende tipes grafieke te identifiseer!

1. Op 'n aparte assestelsel, vir elk, trek grafieke van:

- 1.1 $y = 4 - x^2$ 1.2 $y = \frac{1}{x-4}$ 1.3 $y = 4 - x$
1.4 $y = -\frac{4}{x}$ 1.5 $y = \frac{x}{4}$ 1.6 $y = 4^x$
($6 \times 3 = 18$)

2.1 Ses grafieke, gemerk (a) $\rightarrow$ (f), is hieronder geskets. Onder die grafieke volg daar 10 vergelykings. Pas die grafieke by die vergelykings. Skryf (a) $\rightarrow$ (f) neer, en langs elk die nommer gekies uit (1) $\rightarrow$ (10) wat die vergelyking van die grafiek is.



Lys van moontlike vergelykings

- (1) $xy = 2$ (2) $xy = -2$
(3) $y = -2$ (4) $x = -2$
(5) $y = x^2$ (6) $x = y^2$
(7) $y = 2x$ (8) $y = \frac{x}{2}$
(9) $y = 2^{x+1}$ (10) $y = 2^{x-1}$

2.2 Skryf (a) $\rightarrow$ (f) neer en sê of die grafiek 'n een-tot-een, 'n baie-tot-een of 'n een-tot-baie verhouding tussen die x-waardes (definisieversameling) en die y-waardes (waardeversameling) het. (6)

2.3 Watter van die grafieke (a) $\rightarrow$ (f) is nie funksies nie? Waarom nie? (4)

Wenk: As 'n vertikale lyn 'n grafiek meer as een keer sny, is dit nie 'n funksie nie.
As alle vertikale lyne 'n grafiek (slegs) een keer sal sny, dan is die grafiek 'n funksie.



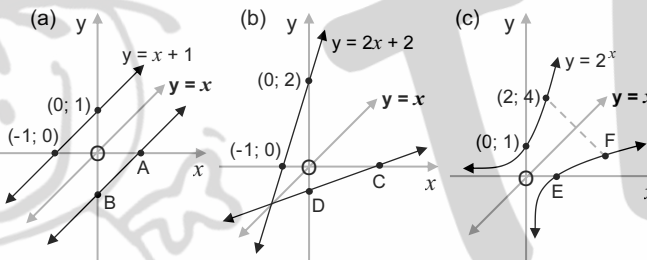
2.4 Skryf die definisieversameling en waardeversameling van grafieke (a) $\rightarrow$ (f) neer. (12)

2.5 Skryf die vergelykings van die asimptote in (c) en (d) neer. (3)

3.1 Teken sketse wat die refleksies van punt P(5; 2) sal toon: (a) in die y-as (b) in die x-as (c) in die lyn $y = x$ (6)

3.2 Beskryf in elke geval die verandering in die koördinate. (3)

3.3 Let op die refleksies van die grafieke in die lyn $y = x$ in die volgende gevalle:

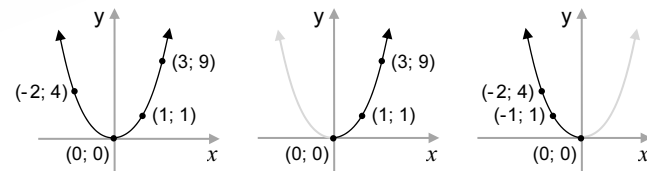


(a) Bepaal die koördinate van die punte A tot F, wat refleksies van die gegewe punte in die lyn $y = x$ is. (6)

(b) Bepaal die vergelykings van die gereflekteerde grafieke (i), (ii) en (iii), deur inspeksie. (3)

4.1 Teken die refleksies van die volgende grafieke in die lyn $y = x$. (6)

(a) $y = x^2$ (b) $y = x^2; x \geq 0$ (c) $y = x^2; x \leq 0$



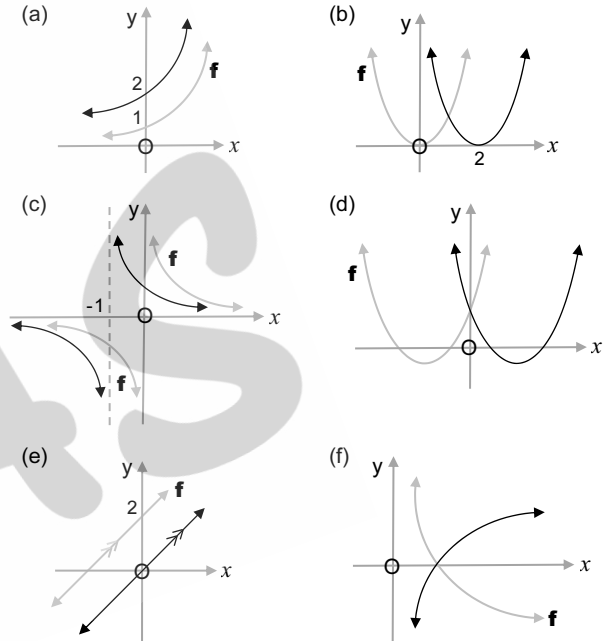
4.2 Is die refleksies in 4.1 geteken, funksies? (3)

4.3 Bepaal die vergelykings van die refleksies in 4.1 geteken. (6)

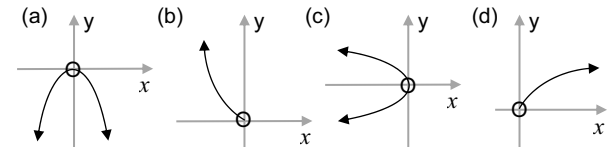
5.1 Gegewe enige funksie, $y = f(x)$, lyn, hiperbool, parabool of eksponensieel, beskryf die transformasie benodig om die volgende beelde van **f** te verkry:

- A $y = f(x) + 1$ B $y = f(x) - 2$ C $y = f(x + 1)$
D $y = f(x - 2)$ E $y = f(-x)$ F $y = -f(x)$ (6)

5.2 Pas die swart grafiek in elk van hierdie sketse by die vergelykings A, B, C, ... in 5.1. (Die grys grafiek is in elke geval die oorspronklike grafiek **f**.) (6)



6.1 Vier grafieke (a) $\rightarrow$ (d) is hieronder geteken. Is enige van hierdie grafieke funksies? Gee redes. (2)

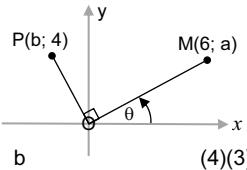
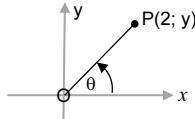


6.2 Pas grafieke (a) $\rightarrow$ (d) by die onderstaande vergelykings (1) $\rightarrow$ (6). Skryf (a) $\rightarrow$ (d) neer en langsaan 'n nommer vanaf (1) tot (6) wat die vergelyking van die toepaslike grafiek is.

- (1) $y = x^2$ (2) $y = x^2; x \leq 0$
(3) $y = -x^2$ (4) $y = -x^2; x \geq 0$
(5) $x = -y^2$ (6) $y = \sqrt{x}; x \geq 0$ (4)

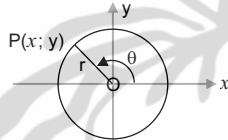
6.3 Teken die grafiek gedefinieer deur $y = \pm \sqrt{x}$. (2)

6. In die meegaande figuur is $P(2; y)$ 'n punt in die eerste kwadrant en $OP = \sqrt{13}$. $\hat{XOP} = \theta$.
- 6.1 Bereken die waarde van y . (2)
 6.2 Skryf die numeriese waarde van $\cos^2 \theta$ neer. (1)
 6.3 Bereken die waarde van: $13 \sin^2(180^\circ + \theta) - \tan \theta$. (4)
7. In die meegaande diagram is $\hat{POM} = 90^\circ$, $\hat{XOM} = \theta$, $M(6; a)$, $P(b; 4)$ en $\sqrt{5} \cos \theta - 2 = 0$.
 Bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, die numeriese (getal-) waarde van: 7.1 a 7.2 b (4)(3)



Boekwerk

8. In die meegaande skets, bewys dat:
- 8.1 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ 8.2 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
 8.3 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$
9. In meegaande figuur is $P(x; y)$ 'n punt op die sirkel met radius r , middelpunt $(0; 0)$ en $\hat{XOP} = \theta$.
- 9.1 Bewys dat:
 (a) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 (b) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- 9.2 Bepaal die waarde van θ as $x = -\sqrt{3}$ en $y = 1$.



Verhoudings word gegee, bereken ...

LW: 'sonder 'n sakrekenaar' beteken 'met 'n skets'

10. As $5 \sin x = 3$ en $x + y = 90^\circ$, bereken sonder die gebruik van 'n sakrekenaar die waarde van:
 10.1 $\cos y$ 10.2 $\tan x + \tan y$ (3)(3)
11. As $5 \tan \theta = 12$ en $\theta \in [90^\circ; 360^\circ]$, bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, maar met 'n gepaste skets, die waarde van $\sin \theta + \cos \theta$. (5)
12. As $\tan A = -\frac{5}{12}$ en $180^\circ \leq A \leq 360^\circ$, teken 'n skets en bereken (sonder om die waarde van A te bepaal) die waarde van: $13 \sin^2 A$ (5)
13. $\sin A = \frac{3}{5}$ en $90^\circ < A < 270^\circ$. Bepaal, deur middel van 'n skets, die waarde van: $\frac{\cos A + \sin A}{1 - \frac{1}{3} \tan A}$ (6)
14. $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$; $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ en $13 \cos \beta - 12 = 0$; $\beta \in (180^\circ; 360^\circ)$
 Bereken die waarde van $\sin \alpha \sin \beta$, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. (5)

15. As $\sin x = -\frac{5}{13}$ en $90^\circ < x < 270^\circ$, bereken $\tan^2 x \cdot \cos^2 x$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. (7)
16. As $\cos x = t$ en $\hat{x}$ is 'n skerphoek, druk
 16.1 $\sin x$, en 16.2 $\tan^2 x$ uit in terme van t (1)(2)
17. As $\tan 27^\circ = p$, druk elk van die volgende uit in terme van p :
 17.1 $\sin 27^\circ$ 17.2 $\cos 27^\circ$ 17.3 $\sin 63^\circ$
 17.4 $\tan 153^\circ$ 17.5 $\tan(-27^\circ)$ 17.6 $\cos^2 387^\circ$ (6x2=12)

OEFENING 6.2

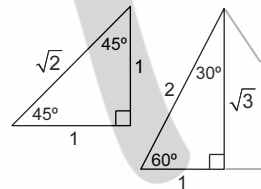
Identiteite

Spesiale $\angle^e$; $180^\circ/360^\circ$ & 90° reëls

Spesiale hoeke

Vereenvoudig **SONDER** die gebruik van 'n sakrekenaar:

- 1.1 $\frac{\cos^2 45^\circ \cdot \cos 0^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \tan 60^\circ}$ 1.2 $\frac{\cos 330^\circ \cdot \tan 150^\circ}{\tan 315^\circ}$ (5)(4)
 1.3 $\frac{\cos 240^\circ \cdot \sin 330^\circ \cdot \tan 120^\circ}{\sin 150^\circ \cdot \tan 210^\circ \cdot \cos 120^\circ}$ 1.4 $\frac{\cos 300^\circ \cdot \tan^2 330^\circ}{\sin^2 315^\circ}$ (9)(5)
- 2.1 $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 45^\circ \cdot \sin(-300^\circ) - \frac{1}{2} \tan(-45^\circ) \cdot \cos^2 585^\circ - \sin(-30^\circ)$ (9)
- 2.2 $\frac{\tan 135^\circ \cdot \sin 230^\circ \cdot \tan(-60^\circ)}{\cos 140^\circ \cdot \tan 300^\circ \cdot \sin 150^\circ}$ (8)
3. $\frac{\tan(-330^\circ) \cdot \sin 480^\circ \cdot \sin 260^\circ}{\cos 225^\circ \cdot \sin 315^\circ \cdot \cos 350^\circ}$ (8)



4. Bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, die waarde van:

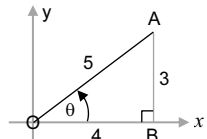
4.1 $\frac{\sin 137^\circ}{\cos 133^\circ}$ 4.2 $\frac{\cos 10^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 80^\circ \cdot \sin 150^\circ}$ (4)(4)

180°/360° Reël (geen veranderinge in verh. nie!)

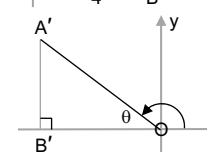


Basiese Gr. 9 transformasies (**KABV**) word hier gebruik om identiteite te ontwikkel.

- 5.1 (a) In die meegaande figuur is die koördinate van punt A ...
 (b) Bepaal die waardes van $\sin \theta$, $\cos \theta$ en $\tan \theta$.



- 5.2 (a) A' is 'n refleksie van punt A in die ... en die koördinate van punt A' is ...
 (b) Skryf $\hat{XOA'}$ in terme van θ .

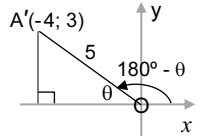


- (c) Bepaal, eers numeries, en dan in terme van θ :

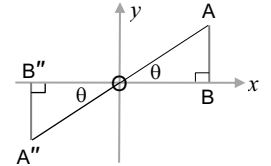
$\sin(180^\circ - \theta) = \left(\frac{y}{r}\right) \dots = \dots$

$\cos(180^\circ - \theta) = \left(\frac{x}{r}\right) \dots = \dots$

$\tan(180^\circ - \theta) = \left(\frac{y}{x}\right) \dots = \dots$



- 5.3 (a) A'' is 'n refleksie van punt A in die ... en die koördinate van punt A'' is ...



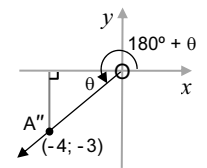
- (b) Skryf inspringende $\hat{XOA''}$ in terme van θ .

- (c) Bepaal, eers numeries en dan in terme van θ :

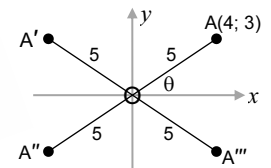
$\sin(180^\circ + \theta) = \left(\frac{y}{r}\right) \dots = \dots$

$\cos(180^\circ + \theta) = \left(\frac{x}{r}\right) \dots = \dots$

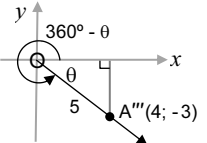
$\tan(180^\circ + \theta) = \left(\frac{y}{x}\right) \dots = \dots$



- 5.4 (a) A''' is 'n refleksie van punt A in die ... en die koördinate van punt A''' is ...



- (b) Skryf inspringende $\hat{XOA'''}$ in terme van θ & skryf skerp $\hat{XOA'''}$ in terme van θ .



- (c) Bepaal, eers numeries, en dan in terme van θ :

$\sin(360^\circ - \theta) = \left(\frac{y}{r}\right) \dots = \dots$

$\cos(360^\circ - \theta) = \left(\frac{x}{r}\right) \dots = \dots$

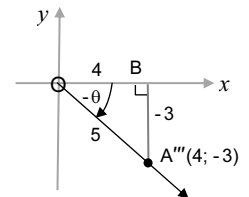
$\tan(360^\circ - \theta) = \left(\frac{y}{x}\right) \dots = \dots$

- (d) Bepaal, eers numeries, en dan in terme van θ :

$\sin(-\theta) = \left(\frac{y}{r}\right) \dots = \dots$

$\cos(-\theta) = \left(\frac{x}{r}\right) \dots = \dots$

$\tan(-\theta) = \left(\frac{y}{x}\right) \dots = \dots$



GEEN PUNTE IS VIR 'TEORIE' VRAE 5 & 6 TOEGEKEN NIE.

Oplossings op bl. 91 – 93

- 2.3 (a) en (f) is nie funksies nie;
'n Grafiek is slegs 'n funksie as daar vir elke x -waarde slegs een y -waarde is. In (a) en (f) se geval, het elke x -waarde meer as een y -waarde.

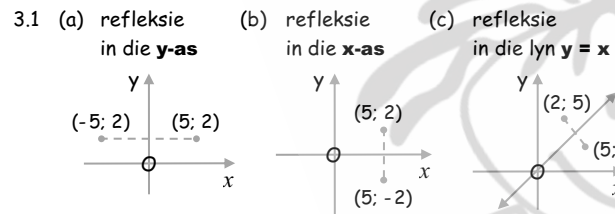
Die vertikale lyn toets: 'n Vertikale lyn sal hierdie grafieke meer as een keer sny.



2.4 Definisieversameling Waardeversameling

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| (a) $x = -2$ | $y \in \mathbb{R}$ |
| (b) $x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}$ |
| (c) $x \in \mathbb{R}$ | $y > 0; y \in \mathbb{R}$ |
| (d) $x \neq 0; x \in \mathbb{R}$ | $y \neq 0; y \in \mathbb{R}$ |
| (e) $x \in \mathbb{R}$ | $y \geq 0; y \in \mathbb{R}$ |
| (f) $x \geq 0; x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}$ |

- 2.5 (c) $y = 0 \leftarrow \dots$ die x -as
(d) $y = 0 \leftarrow \dots$ die x -as
& $x = 0 \leftarrow \dots$ die y -as



- 3.2 (a) $x \rightarrow -x$ (b) $x \rightarrow x$ (c) $x \rightarrow y$
 $y \rightarrow y \leftarrow$ $y \rightarrow -y \leftarrow$ $y \rightarrow x \leftarrow$

- 3.3 (a) A(1; 0), B(0; -1), C(2; 0), D(0; -1), E(1; 0), F(4; 2)

- (b) (i) $y = x - 1 \leftarrow$ (ii) $y = \frac{1}{2}x - 1 \leftarrow$ (iii) $x = 2^y \leftarrow$

LW: • Dis te verstane dat in (c), x en y in die vergelyking omgeruil word om die refleksie in $y = x$ te kry.

• Ruil nou x & y in die gegewe vergelykings in (a) & (b) om:

Gegee: (a) $y = x + 1$ (b) $y = 2x + 2$

Die refleksie: $x = y + 1$ $x = 2y + 2$

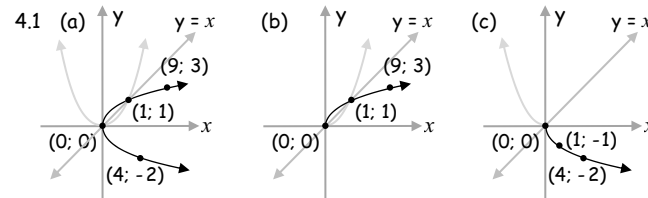
Maak nou y die onderwerp:

$$y + 1 = x \quad \therefore 2y + 2 = x$$

$$\therefore y = x - 1 \leftarrow \quad \therefore 2y = x - 2$$

$$\therefore y = \frac{x}{2} - 1 \leftarrow$$

Hierdie is die vergelykings wat hierbo deur inspeksie, bepaal is.



Vind die 'kritiese punte' deur x en y om te ruil.

- 4.2 (b) en (c) is, maar (a) is nie. $\leftarrow$

LW: Bepanking van die definisieversamelings ($x \geq 0$ of $x \leq 0$) verseker dat die refleksies funksies is.

- 4.3 (a) $x = y^2$ (b) $y = (+)\sqrt{x} \leftarrow$ (c) $y = -\sqrt{x} \leftarrow$
 $\therefore y^2 = x$
 $\therefore y = \pm\sqrt{x} \leftarrow$

LW: Die grafiek $y = \pm\sqrt{x}$ is in 2 grafieke verdeel:
 $y = +\sqrt{x}$ en $y = -\sqrt{x}$

- 5.1 A transleer 1 eenheid opwaarts $\leftarrow$
B transleer 2 eenhede afwaarts $\leftarrow$
C transleer 1 eenheid na links $\leftarrow$
D transleer 2 eenhede na regs $\leftarrow$
E refleksie in die y -as $\leftarrow$
F refleksie in die x -as $\leftarrow$



- 5.2 (a) A (b) D (c) C (d) E (e) B (f) F

- 6.1 Almal behalwe (c), want in (c) is daar 2 y -waardes vir elke x -waarde (behalwe vir $x = 0$). $\leftarrow$

LW: Hierdie grafiek sal twee keer deur 'n vertikale lyn gesny word. (Alle ander grafieke sal net een keer gesny word.)

- 6.2 (a) (3) (b) (2) (c) (5) *(d) (6)

***LW:** (d) • Jy moet $x \geq 0$ in $y = \sqrt{x}$ hê
 $\dots \sqrt{\text{'n negatiewe getal is imaginêr}}$

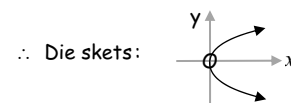
$$\bullet y = +\sqrt{x} \Rightarrow y \geq 0$$

$$\bullet y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$$

d.w.s. $x = y^2$, maar $y \geq 0$ (& $x > 0$)

$\therefore$ Slegs die 'bo-arm' van die parabool.

- 6.3 $y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$ en y kan + of - wees.



'Beide arms' van die parabool.

$$x = y^2 \text{ of } y = \pm\sqrt{x}$$

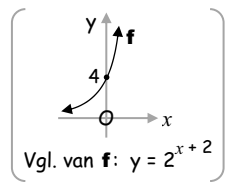
7. B is nie 'n funksie nie $\leftarrow$

Vir elke waarde van x (in die definisieversameling) is daar nie net een y -waarde nie. ('n Vertikale lyn sal hierdie grafiek twee keer sny.)

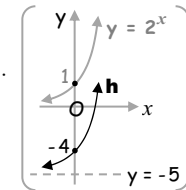
- 8.1 Vergelyking van $f: y = 2^{x+a}$

As 'n punt op 'n grafiek lê, maak sy koördinate die vergelyking waar!

$$\begin{aligned} \text{Stel pt. (1; 8) in: } 8 &= 2^{1+a} \\ \therefore 1+a &= 3 \\ \therefore a &= 2 \leftarrow \end{aligned}$$



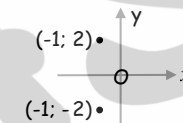
- 8.2 $h: y = 2^{x+2-2} - 5$
 $\therefore y = 2^x - 5 \leftarrow$



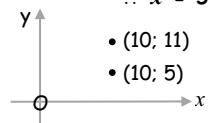
- 8.3 $y = -5 \leftarrow$

- 9.1 Nee;

Vir $x = -1$, kan y 2 of -2 wees. $\leftarrow$



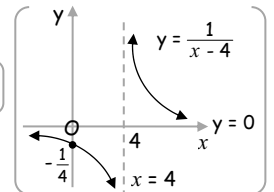
- 9.2 Nie 'n funksie as $x_p = x_q$
d.w.s. as $2x = x + 5$
 $\therefore x = 5 \leftarrow$



'n Vertikale lyn sal die grafiek meer as een keer sny.

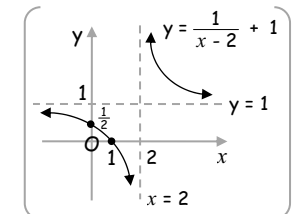
- 10.1 $x \neq 4; x \in \mathbb{R} \leftarrow$

$$\left[\text{In } y = \frac{1}{x-4}: x-4 \neq 0 \therefore x \neq 4 \right]$$



- 10.2 $x = 4$ & $y = 0 \leftarrow$

- 10.3 (a) $y = \frac{1}{x-4+2} + 1$
 $\therefore y = \frac{1}{x-2} + 1 \leftarrow$



- (b) $x = 2 \leftarrow$ en $y = 1 \leftarrow$

- 11.1 x -afsnitte: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$
 $\therefore (x-5)(x+1) = 0$
 $\therefore x = 5$ of $-1 \leftarrow$

$$1.3 \quad \frac{(-\cos 60^\circ)(-\sin 30^\circ)(-\tan 60^\circ)}{(+\sin 30^\circ)(+\tan 30^\circ)(-\cos 60^\circ)}$$

$$= +\frac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \dots = (\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{1})$$

$$= 3 <$$

$$1.4 \quad \frac{(+\cos 60^\circ)(-\tan 30^\circ)^2}{(-\sin 45^\circ)^2}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

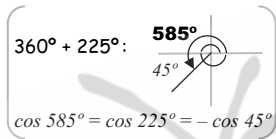
$$= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})}{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{3} <$$

$$2.1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (\sin 60^\circ) - \frac{1}{2} (-\tan 45^\circ)(-\cos 45^\circ)^2 - (-\sin 30^\circ)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} (-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 1 <$$

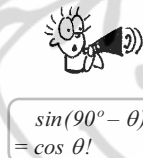


$$2.2 \quad \frac{(-\tan 45^\circ)(-\sin 50^\circ)(-\tan 60^\circ)}{(-\cos 40^\circ)(-\tan 60^\circ)(+\sin 30^\circ)}$$

$$= \frac{(-1)(-\sin 50^\circ)}{(-\cos 40^\circ)(\frac{1}{2})}$$

$$= -\frac{\cos 40^\circ}{(\cos 40^\circ)(\frac{1}{2})} \dots \sin 50^\circ = \cos 40^\circ$$

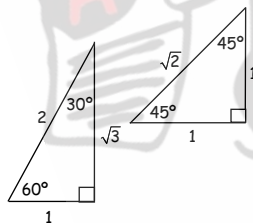
$$= -2 <$$



$$3. \quad \frac{(\tan 30^\circ)(+\sin 60^\circ)(-\sin 80^\circ)}{(-\cos 45^\circ)(-\sin 45^\circ)(+\cos 10^\circ)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{\sqrt{3}}{2})(-\sin 80^\circ)}{(-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}})(\sin 80^\circ)}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 <$$



$$4.1 \quad \frac{+\sin 43^\circ}{-\cos 47^\circ}$$

$$= -\frac{\cos 47^\circ}{\cos 47^\circ} \dots 43^\circ + 47^\circ = 90^\circ!$$

$$= -1 <$$

$$4.2 \quad \frac{(\sin 80^\circ)(-\cos 60^\circ)}{(\sin 80^\circ)(+\sin 30^\circ)}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \left[\text{OF: } \frac{-\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}\right]$$

$$= -1 <$$

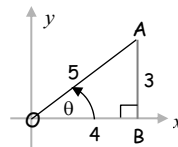
180°/360° Reël (geen veranderinge in verh. nie!)

$$5.1 \quad (a) \quad A(4; 3) <$$

$$(b) \quad \sin \theta = \frac{3}{5} <$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5} <$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4} <$$



$$5.2 \quad (a) \quad y\text{-as} < ; A'(-4; 3) <$$

$$(b) \quad \angle O\hat{A}' = 180^\circ - \theta <$$

$$(c) \quad \sin(180^\circ - \theta) = \frac{3}{5} = \sin \theta <$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{4}{5} = -\cos \theta <$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\frac{3}{4} = -\tan \theta <$$

sien 5.1(b) hierbo

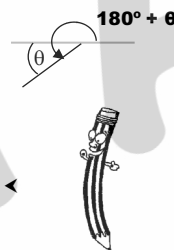
$$5.3 \quad (a) \quad \text{die oorsprong} < ; A''(-4; -3) <$$

$$(b) \quad \angle O\hat{A}'' = 180^\circ + \theta <$$

$$(c) \quad \sin(180^\circ + \theta) = -\frac{3}{5} = -\sin \theta <$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\frac{4}{5} = -\cos \theta <$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = \tan \theta <$$



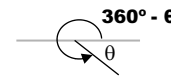
$$5.4 \quad (a) \quad x\text{-as} < ; A'''(4; -3) <$$

$$(b) \quad \text{inspr. } \angle O\hat{A}''' = 360^\circ - \theta < \text{ \& skerp } \angle O\hat{A}''' = -\theta <$$

$$(c) \quad \sin(360^\circ - \theta) = -\frac{3}{5} = -\sin \theta <$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \frac{4}{5} = \cos \theta <$$

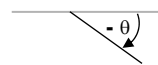
$$\tan(360^\circ - \theta) = -\frac{3}{4} = -\tan \theta <$$



$$(d) \quad \sin(-\theta) = -\frac{3}{5} = -\sin \theta <$$

$$\cos(-\theta) = \frac{4}{5} = \cos \theta <$$

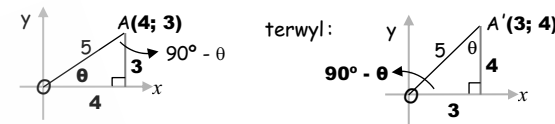
$$\tan(-\theta) = -\frac{3}{4} = -\tan \theta <$$



90° Reël (ko-verhoudings!!!)

$$6.1 \quad (a) \quad \angle O\hat{A}B = 90^\circ - \theta < \quad (b) \quad y = x < \quad (c) \quad A'(3; 4) <$$

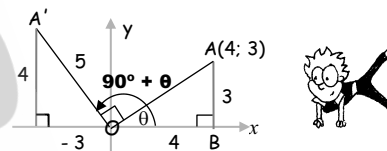
LW: Die skerphoek in die Δ, θ en 90° - θ, het plekke omgeruil! So ook die twee reghoeksy (4 en 3).



$$(d) \quad \sin(90^\circ - \theta) = \frac{4}{5} = \cos \theta <$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{3}{5} = \sin \theta <$$

$$6.2 \quad (a) \quad A'(-3; 4) <$$



$$(b) \quad \angle B\hat{O}A' = \theta + 90^\circ \text{ of } 90^\circ + \theta <$$

$$(c) \quad \sin(90^\circ + \theta) = \frac{4}{5} = \cos \theta <$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\frac{3}{5} = -\sin \theta <$$

180°/360° & 90° Reël: Gemeng

$$7. \quad (a) \quad -\sin 45^\circ < \quad (b) \quad -\cos 30^\circ < \quad (c) \quad +\tan 60^\circ <$$

$$(d) \quad +\sin 30^\circ < \quad (e) \quad -\cos 60^\circ < \quad (f) \quad +\tan 45^\circ <$$

$$(g) \quad +\tan 60^\circ < \quad (h) \quad +\sin 45^\circ < \quad (i) \quad +\cos 60^\circ <$$

$$8.1 \quad \frac{(+\sin x)(-\cos x)(+\tan x)}{(-\sin x)(+\cos x)}$$

$$= +\tan x <$$

$$8.2 \quad \frac{(\cos \theta)(-\tan \theta)}{(+\cos \theta)(-\sin \theta)}$$

$$= +\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta}$$

$$8.3 \quad \frac{(+\sin x)(\sin x)}{(+\cos x)(-\sin x)}$$

$$= -\tan x <$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} <$$

$$8.4 \quad \frac{(+\cos \theta)(-\tan \theta)}{(-\sin \theta)} + \frac{(+\cos \theta)}{(+\cos \theta)} \dots \cos(\theta - 360^\circ)$$

$$= +\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1 = \cos[-(360^\circ - \theta)]$$

$$= 1 + 1 = \cos(360^\circ - \theta)$$

$$= 2 <$$

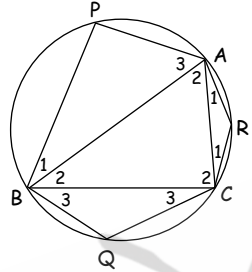
$$= +\cos \theta$$



$$9.1 \quad x = 35^\circ < \dots 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$$

$$9.2 \quad y = 40^\circ < \dots \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

- (b) $\hat{ACB} = y$... verwisselende $\angle^e$; $AD \parallel BC$
 $\therefore \hat{DCB} = x + y$
 $\therefore \hat{ABH} = x + y$... ooreenkomstige $\angle^e$; $AB \parallel CD$
 Maar $\hat{F} = x + y$ in 14.2 (a)
 $\therefore \hat{ABH} = \hat{F}$
 $\therefore HBEF$ is 'n koordevrhk. ... buite $\angle$ = teenoorst. binne $\angle^e$
 $\therefore \hat{AHB} = \hat{BEF}$ ($= 90^\circ$) ... buite $\angle$ van koordevrhk.
 d.w.s. $\hat{AHC} = 90^\circ \angle$

15. $\hat{BPA} = 180^\circ - \hat{C}_2$
 $\hat{BQC} = 180^\circ - \hat{A}_2$
 $\& \hat{ARC} = 180^\circ - \hat{B}_2$
- (teenoorst. $\angle^e$ van koordevierhoeke BPAC, BQCA, ARCB (onderskeidelik))*
- 
- $\therefore \hat{BPA} + \hat{BQC} + \hat{ARC} = 3 \times 180^\circ - (\hat{C}_2 + \hat{A}_2 + \hat{B}_2)$
 $= 3 \times 180^\circ - 180^\circ$... $\angle$ som van Δ
 $= 2 \times 180^\circ$
 $= 360^\circ \angle$

OEFENING 10.2

Sirkelmeetkunde: Insluitend Raaklyne

Sien **BOEKWERK:**
EKSAMINEERBARE BEWYSE
op bl. i (agter in hierdie boek).



- 1.1 Stelling
- 1.2 (a) $\hat{A}_2 = x \angle$... raaklyn-koord stelling
 (b) $\hat{AED} = 90^\circ$... middellyn $\perp$ raaklyn
 $\therefore \hat{E}_1 = 90^\circ - x \angle$
 (c) In ΔEFC , $\hat{F}_3 = 90^\circ$... lyn vanuit midpt. na midpt. van koord
 $\therefore \hat{C}_2 = x \angle$... $\hat{E}_1 = 90^\circ - x$; $\angle$ som van Δ
 (d) $\hat{A}_1 = \hat{C}_2 = x \angle$... $\angle^e$ in dieselfde segment
- 2.1 $\hat{D}_1 = x \angle$... raaklyn-koord stelling
 $\therefore \hat{A}_3 = x \angle$... verw. $\angle^e$; $AB \parallel ED$
 $\therefore \hat{C}_1 = x \angle$... buite $\angle$ van koordevierhoek
- 2.2 $\hat{E} = y \angle$... raaklyn-koord stelling
 raaklyn NAT; koord AD

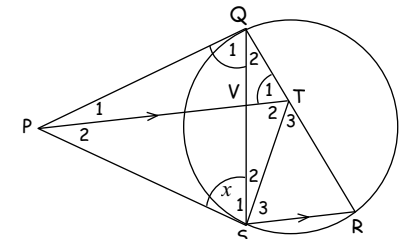


- 3.1 $\hat{DBE} = \hat{BAE}$... raaklyn-koord stelling
 $= \hat{CAE}$... gegee
 $= \hat{CBE}$... $\angle^e$ in dieselfde segment
 d.w.s. BE halveer $\hat{CBD} \angle$
- 3.2 **Ja**;
 $\hat{ABF} = \hat{AEB}$... raaklyn-koord stelling
 $\therefore \hat{CAE} = \hat{AEB}$
 $\therefore AC \parallel BE$... verw. $\angle^e =$

- 4.1 (a) $\hat{BAO} = 38^\circ \angle$... $\angle^e$ teenoor = radiusse
 (b) $\hat{AOD} = 76^\circ \angle$... middelpunts $\angle = 2 \times$ omtreks $\angle$ of: buite $\angle$ van ΔAOB
 (c) $\hat{ACD} = 38^\circ \angle$... $\angle^e$ in dieselfde segment
 (d) $\hat{ACB} = 52^\circ \angle$... $\hat{BCD}$ in semi $\odot$
 (e) $\hat{DCE} = 25^\circ \angle$... raaklyn-koord stelling
 $\therefore \hat{ACE} = 25^\circ + 38^\circ = 63^\circ \angle$
- 4.2 (a) $\hat{QPR} = x$... raaklyn-koord stelling
 $\therefore \hat{PRT} = x$... verw. $\angle^e$; $QP \parallel RT$
 $\therefore \hat{QSR} = x$... raaklyn-koord stelling of $\angle^e$ in dieselfde segm.
 (b) Gelyke koorde onderspan gelyke $\angle^e$. $\angle$
 (c) $\hat{KQR} = \hat{QPR} + \hat{PRQ}$... buite $\angle$ van ΔPQR
 $= x + y$... in 4.2(a) en 4.2(b)
 $\& \hat{MNR} = \hat{QSR} + \hat{SRT}$... buite $\angle$ van ΔNRS
 $= x + y$... in 4.2(a) en 4.2(b)
 $\therefore \hat{KQR} = \hat{MNR} \angle$
- 4.3 (a) $\hat{P}_1 = x \angle$... raaklyn-koord stelling
 $\therefore \hat{P}_2 = x \angle$... gegee
 $\therefore \hat{S}_4 = x \angle$... raaklyn-koord stelling
 (b) 'n Buitehoek van 'n koordevierhoek is gelyk aan die teenoorstaande binnehoek.
 (c) $\hat{S}_3 = \hat{R}_1 - \hat{P}_2$... buite $\angle$ van ΔSRP
 $\& \hat{A} = \hat{Q}_2 - \hat{S}_1$... buite $\angle$ van ΔASQ
 Maar $\hat{R}_1 = \hat{Q}_2$... in 4.3(b) bewys
 $\& \hat{P}_2 = \hat{S}_1$... in 4.3(a) bewys
 $\therefore \hat{S}_3 = \hat{A} \angle$

- 5.1 $\hat{A} = x \angle$... raaklyn-koord stelling
 $\therefore \hat{C}_3 = x \angle$... $\angle^e$ teenoor = radiusse

- 5.2 $\hat{BCA} = 90^\circ$... $\angle$ in semi $\odot$
 $\therefore \hat{PCT} = 90^\circ + x$... $\hat{C}_1 = x$
OF: $\hat{OCP} = 90^\circ$... radius $\perp$ raaklyn
 $\therefore \hat{PCT} = 90^\circ + x$... $\hat{C}_3 = x$
 $\& \hat{T}_2 = \hat{O}_3 + \hat{A}$... buite $\angle$ van ΔTAO
 $= 90^\circ + x$... $SO \perp AB$, $\hat{A} = x$
 $\therefore \hat{PCT} = \hat{T}_2$
- 5.3 (a) In ΔCAP : $\hat{P} = 180^\circ - (x + 90^\circ + x)$... $\angle$ som van Δ
 $= 90^\circ - 2x$
 $\therefore$ In ΔSOP : $\hat{S} = 2x$... $\hat{SOP} = 90^\circ$; $\angle$ som van Δ
 d.w.s. $\hat{CST} = 2x \angle$
 (b) $\hat{O}_1 = \hat{C}_3 + \hat{A}$... buite $\angle$ van ΔCAO
 d.w.s. $\hat{COB} = 2x \angle$... $\hat{C}_3 = \hat{A} = x$ in 5.1
 (c) $\hat{P} = 90^\circ - 2x \angle$... sien 5.3(a)
- 5.4 ΔACP & ΔCBP ($||| \Delta CTO$ [$x; 90 + x$]) $\angle$
- 5.5 $OP^2 - OA^2 = (OP + OA)(OP - OA)$
 $= PA \cdot (OP - OB)$... $OA = OB =$ radius
 $= PA \cdot PB$
- OF:**
 In ΔOCP : $\hat{OCP} = 90^\circ$... radius $\perp$ raaklyn
 $\therefore PC^2 = OP^2 - OC^2$... Pythagoras
 $\therefore PC^2 = OP^2 - OA^2$... ① ... $OC = OA =$ rad.
 $\Delta ACP ||| \Delta CBP$... beide $||| \Delta CTO$ in 5.4
 $\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$... eweredige sye
 $\therefore PC^2 = PA \cdot PB$... ②
 $\therefore PA \cdot PB = OP^2 - OA^2$... vanaf ① & ②

6. 
- 6.1 $\hat{S}_1 (= x) = \hat{Q}_1$... raaklyne vanuit dieselfde punt
 $= \hat{R}$... raaklyn-koord stelling
 $= \hat{T}_1$... ooreenkomstige $\angle^e$; $PT \parallel SR$
 $\therefore \hat{Q}_1, \hat{R}$ en $\hat{T}_1$ elk gelyk aan $x \angle$



VRAESTEL A1

Jy mag 'n goedgekeurde wetenskaplike sakrekenaar (nie-programmeerbaar en nie-grafies) gebruik, tensy anders vermeld. Dui ALLE berekeninge, diagramme, grafieke, ensovoorts wat jy in die bepaling van jou antwoorde gebruik het, duidelik aan.

Volpunte sal nie noodwendig aan antwoorde alleen toegeken word nie.

Indien nodig, rond antwoorde tot TWEE desimale plekke af, tensy anders vermeld.

VRAAG 1

1.1 Los op vir x in elk van die volgende:

1.1.1 $(2x - 1)(x + 4) = 0$ (2)

1.1.2 $3x^2 - x = 5$
(Laat jou antwoord korrek tot TWEE desimale plekke.) (4)

1.1.3 $x^2 + 7x - 8 < 0$ (4)

1.2 Gegee: $4y - x = 4$ en $xy = 8$

1.2.1 Los vir x en y gelyktydig op. (6)

1.2.2 Die grafiek van $4y - x = 4$ word om die lyn $y = x$ gereflekteer. Wat is die vergelyking van die gereflekteerde lyn? (2)

1.3 Die oplossings van 'n kwadratiese vergelyking word gegee

deur $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2p + 5}}{7}$.

Vir watter waarde(s) van p sal hierdie vergelyking die volgende hê:

1.3.1 Twee gelyke oplossings, d.w.s. slegs 1 wortel (2)

1.3.2 Geen reële wortels (1)

1.4 Los op vir x : $\sqrt{5 - x} - x = 1$ (5) [26]

VRAAG 2

2.1 $3x + 1$; $2x$; $3x - 7$ is die eerste drie terme van 'n rekenkundige ry. Bereken die waarde van x . (2)

2.2 Die eerste en tweede terme van 'n rekenkundige ry is 10 en 6 onderskeidelik.

2.2.1 Bereken die 11^{de} term van die ry. (2)

2.2.2 Die som van die eerste n terme van hierdie ry is -560 . Bereken n . (5) [9]

VRAAG 3

3.1 Gegee die meetkundige ry: 27 ; 9 ; $3 \dots$

3.1.1 Bepaal 'n formule vir T_n , die n^{de} term van die ry. (2)

3.1.2 Waarom bestaan die som tot oneindig vir hierdie ry? (1)

3.1.3 Bepaal S_{∞} . (2)

3.2 Die n^{de} term van 'n ry word gegee deur $T_n = -2(n - 5)^2 + 18$.

3.2.1 Skryf die eerste DRIE terme van die ry neer. (3)

3.2.2 Watter term van die ry sal die grootste waarde hê? (1)

3.2.3 Wat is die tweede verskil van hierdie kwadratiese ry? (2)

3.2.4 Bepaal ALLE waardes van n waarvoor die terme van die ry kleiner as -110 sal wees. (6) [17]

VRAAG 4

4.1 Beskou die funksie $f(x) = 3.2^x - 6$.

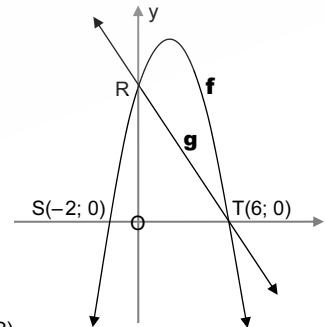
4.1.1 Bereken die koördinate van die y -afsnit van die grafiek van f . (1)

4.1.2 Bereken die koördinate van die x -afsnit van die grafiek van f . (2)

4.1.3 Skets die grafiek van f . Dui ALLE asimptote en afsnitte met die asse duidelik aan. (3)

4.1.4 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)

4.2 $S(-2; 0)$ en $T(6; 0)$ is die x -afsnitte van die grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$ en R is die y -afsnit. Die reguitlyn deur R en T verteenwoordig die grafiek van $g(x) = -2x + d$.



4.2.1 Bepaal die waarde van d . (2)

4.2.2 Bepaal die vergelyking van f in die vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. (4)

4.2.3 As $f(x) = -x^2 + 4x + 12$, bereken die koördinate van die draaipunt van f . (2)

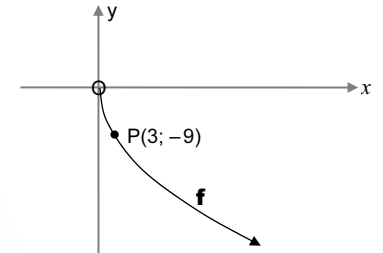
4.2.4 Vir watter waardes van k sal $f(x) = k$ twee afsonderlike wortels hê? (2)

4.2.5 Bepaal die maksimum waarde van $h(x) = 3^{f(x)} - 12$. (3) [20]

VRAAG 5

Die grafiek van

$f(x) = -\sqrt{27x}$ vir $x \geq 0$ is langsaan geskets.



Die punt $P(3; -9)$ lê op die grafiek van f .

5.1 Gebruik die grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $f(x) \geq -9$. (2)

5.2 Skryf die vergelyking van f^{-1} neer in die vorm $y = \dots$. Dui ALLE beperkings aan. (3)

5.3 Skets f^{-1} , die inverse van f op die grafiek hierbo. Dui die afsnit(te) met die asse en die koördinate van EEN ander punt aan. (3)

5.4 Beskryf die transformasie van f na g as $g(x) = \sqrt{27x}$, waar $x \geq 0$. (1) [9]

VRAAG 6

Die grafiek van 'n hiperbool met vergelyking $y = f(x)$ het die volgende eienskappe:

- Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}, x \neq 5$
- Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}, y \neq 1$
- Gaan deur die punt $(2; 0)$

Bepaal $f(x)$.



[4]



Let wel:

Die **ONDERWERPGIDSE** op bl. 147 & 148 kan regdeur hierdie vraestelle leiding gee vir hersiening van spesifieke afdelings.

$$3.2 \quad T_n = -2(n-5)^2 + 18$$

$$3.2.1 \quad T_1 = -2(1-5)^2 + 18 = -32 + 18 = -14 <$$

$$T_2 = -2(2-5)^2 + 18 = -18 + 18 = 0 <$$

$$T_3 = -2(3-5)^2 + 18 = -8 + 18 = 10 <$$

3.2.2 As 'n mens 'n grafiek van $T_n = -2(n-5)^2 + 18$ geteken het,

Vergelyk met: $y = -2(x-5)^2 + 18$

dan sal die draaipunt (5; 18) wees

∴ Die maksimum waarde van T_n (wat 18 is) sal voorkom wanneer $n = 5$.

∴ Die 5^{de} term <

$$3.2.3 \quad \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \\ -14 & 0 & 10 \end{array}$$

1^{ste} verskil:

2^{de} verskil:

∴ Die tweede verskil = -4 <

$$3.2.4 \quad T_n < -110 \Rightarrow -2(n-5)^2 + 18 < -110$$

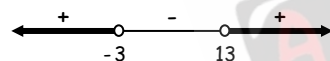
$$\therefore -2(n^2 - 10n + 25) + 18 < 0$$

$$\therefore -2n^2 + 20n - 50 + 18 < 0$$

$$\therefore -2n^2 + 20n + 78 < 0$$

$$\div (-2) \quad \therefore n^2 - 10n - 39 > 0$$

$$\therefore (n+3)(n-13) > 0$$



$$\therefore n < -3 \text{ of } n > 13$$

n is die aantal terme ∴ $n \geq 0$ en $n \in \mathbb{N}_0$

∴ $n > 13$; $n \in \mathbb{N}$ <

$$4.1 \quad f(x) = 3 \cdot 2^x - 6$$

4.1.1 Op die y -as, $x = 0$:

$$f(0) = 3 \cdot 2^0 - 6 = 3 - 6 = -3 \quad \dots 2^0 = 1$$

∴ Die y -afsnit: (0; -3) <

4.1.2 Op die x -as, $y = 0$, d.w.s. $f(x) = 0$

$$3 \cdot 2^x - 6 = 0$$

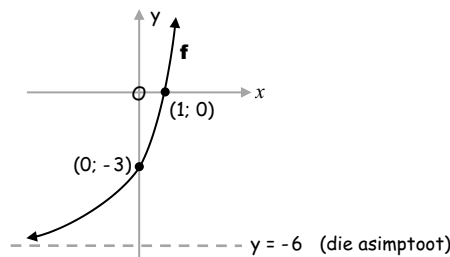
$$\therefore 3 \cdot 2^x = 6$$

$$\therefore 2^x = 2$$

$$\therefore x = 1$$

∴ Die x -afsnit: (1; 0) <

4.1.3



$$4.1.4 \quad y > -6 ; y \in \mathbb{R} <$$

4.2.1 Deur inspeksie, $d = 12$ < ... grad., $m = -2$ & x -afsnit (6; 0)

OF: Stel (6; 0) in $y = -2x + d$

$$\therefore 0 = -2(6) + d$$

$$\therefore 12 = d$$

$$4.2.2 \quad f(x) = a(x+2)(x-6) \quad \dots \text{wortels } -2 \text{ en } 6$$

$$\therefore f(x) = a(x^2 - 4x - 12)$$

$$\text{Die } y\text{-afsnit: } -12a = 12$$

$$\therefore a = -1$$

$$\therefore f(x) = -(x^2 - 4x - 12)$$

$$\therefore f(x) = -x^2 + 4x + 12 <$$

LW:

Leerdere word gepenaliseer as alle berekeninge nie getoon word nie.

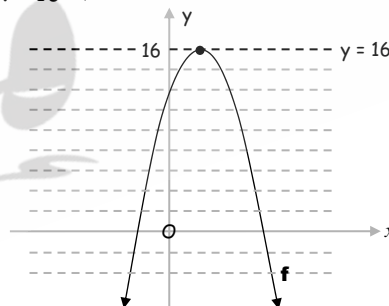
$$4.2.3 \quad \text{Die } x\text{-koördinaat van die draaipunt is } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-1)} = 2$$

of $x = 2$... halfpad tussen die wortels -2 en 6

$$\& f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 12 = 16$$

∴ Die draaipunt is (2; 16) <

$$4.2.4 \quad k < 16 <$$



al hierdie lyne sny f twee keer
∴ daar sal 2 afsonderlike wortels wees

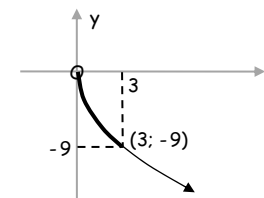
4.2.5 $h(x)$ het 'n maksimum waarde wanneer $f(x)$ 'n maksimum waarde het.

$$\text{Maksimum waarde van } f(x) = 16$$

$$\therefore \text{Maksimum waarde van } f(x) - 12 = 16 - 12 = 4$$

$$\therefore \text{Maksimum waarde van } h(x) = 3^4 = 81 <$$

$$5.1 \quad 0 \leq x \leq 3 <$$



5.2 Die vergelyking van f : $y = -\sqrt{27x}$ vir $x \geq 0$

∴ Die vergelyking van f^{-1} : $x = -\sqrt{27y}$ vir $y \geq 0$

$$\therefore x^2 = 27y ; \text{ maar onthou: } x \leq 0$$

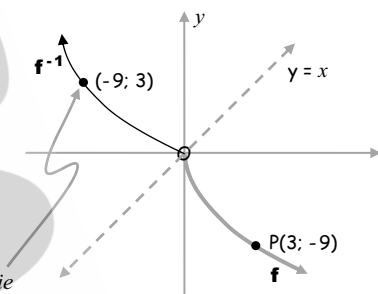
$$\div 27) \quad \therefore y = \frac{x^2}{27} \quad \dots \text{ of } y = \frac{1}{27}x^2$$

$$\therefore y = \frac{x^2}{27} \text{ vir } x \leq 0 <$$

5.3

Let Wel:

f^{-1} is die refleksie van f in die lyn $y = x$



Hierdie punt is 'n refleksie van (3; -9) in die stippellyn

5.4 'n Refleksie in die x -as < ... $(x; y) \rightarrow (x; -y)$

6. Die vergelyking van die hiperbool: $y = \frac{a}{x-p} + q$

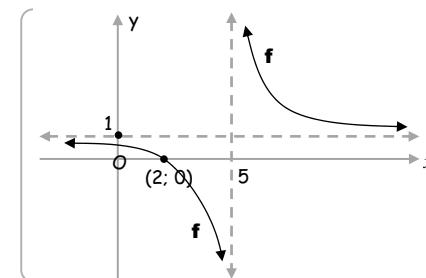
$$\therefore y = \frac{a}{x-5} + 1$$

$$\text{Stel (2; 0) in: } \therefore 0 = \frac{a}{(2-5)} + 1$$

$$\therefore -1 = \frac{a}{-3}$$

$$\times (-3) \quad \therefore 3 = a$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{x-5} + 1 <$$





THE
ANSWER
SERIES *Your Key to Exam Success*

2-in-1

Wiskunde

VLAK 3 & 4 UITDAGENDE VRAE
MET OPLOSSINGS

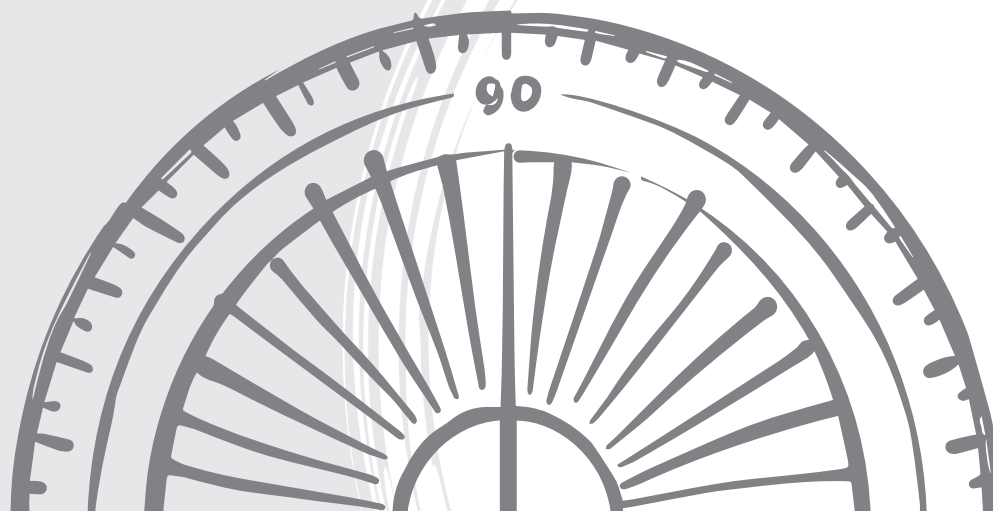
Anne Eadie & Gretel Lampe

GRAAD

12

KABV

π



9 781920 568696

Onafhanklike Gebeurtenisse vs. Onderling Uitsluitende Gebeurtenisse

Bestudeer eers Die Waarskynlikheidsreëls op die vorige bladsy.

VRAAG 2

'n Opname oor die vakansievoorkeure van 180 personeellede is gedoen. Die opsies waaruit hulle kon kies, was om:

- Kus toe te gaan
- 'n Wildreservaat te besoek
- Tuis te bly



Die resultate is in die tabel hieronder aangeteken:

	Kus	Wild-reservaat	Tuis	Totaal
Manlik	46	24	13	83
Vroulik	52	38	7	97
Totaal	98	62	20	180

- 2.1 Bepaal die waarskynlikheid dat 'n personeelid wat ewekansig gekies is:
- 2.1.1 manlik sal wees (1)
- 2.1.2 nie verkies om 'n wildreservaat te besoek nie (2)
- 2.2 Is die gebeurtenisse 'manlik' en 'tuis bly' onafhanklike gebeurtenisse? Motiveer jou antwoord met toepaslike berekeninge. (4) [7]

Oplossings

2.1.1 $P(\text{manlik}) = \frac{83}{180} <$

NB: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

2.1.2 $P(\text{nie wildreservaat nie}) = \frac{98+20}{180} = \frac{118}{180} = \frac{59}{90} < \dots P(\text{kus of tuis})$

2.2 $P(M \text{ en tuis}) = \frac{13}{180} = 0,072 <$

$P(\text{manlik}) = \frac{83}{180}$ and $P(\text{tuis}) = \frac{20}{180}$

$\therefore P(\text{manlik}) \times P(\text{tuis}) = \frac{83}{180} \times \frac{20}{180} = 0,051\dots$

$\therefore$ Die gebeurtenisse is nie onafhanklik nie $\dots P(M \text{ \& tuis}) \neq P(M) \times P(\text{tuis})$



VRAAG 3

Vir twee gebeurtenisse, A en B, word gegee dat:

$P(A) = 0,2$

$P(B) = 0,63$

$P(A \text{ en } B) = 0,126$



Is die gebeurtenisse, A en B, onafhanklik?

Motiveer jou antwoord met toepaslike berekeninge. (3)

Oplossing

Onafhanklike gebeurtenisse:

Vir 2 gebeurtenisse A en B om ONAFHANKLIK te wees:

moet $P(A \text{ en } B)$ gelyk wees aan $P(A) \times P(B)$
 $\dots$ die **PRODUK**reël genoem

Bereken dus die waarde van elk van hierdie uitdrukkings om te bepaal of hulle gelyk is of nie.

$P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,63 = 0,126$

Maar, ook is $P(A \text{ en } B) = 0,126 \dots$ gegee

$\therefore P(A) \times P(B) = P(A \text{ en } B)$

$\therefore$ Die 2 gebeurtenisse A en B is onafhanklik

Let op die uitleg van die BEWYS;
d.w.s. die antwoord moet REGVERDIG word!



NB: **Moenie** onafhanklike gebeurtenisse met onderling uitsluitende gebeurtenisse verwar nie!

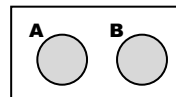


Onderling uitsluitende gebeurtenisse:

Vir 2 gebeurtenisse A en B om ONDERLING UITSLUITEND te wees:

$P(A \text{ of } B)$ moet gelyk wees aan $P(A) + P(B)$
 $\dots$ die **SOM**reël genoem

Dus, noodwendig: $P(A \cap B) = 0 \dots$
(A en B oorvleuel nie)



VRAAG 4

Gegee: $P(A) = 0,45$; $P(B) = y$ en $P(A \text{ of } B) = 0,74$

Bepaal die waarde(s) van y as A en B onderling uitsluitend is. (3)

Oplossing

$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) \dots A \text{ en } B \text{ is onderling uitsluitende gebeurtenisse.}$

$\therefore 0,74 = 0,45 + y$

$\therefore y = 0,29 <$

VRAAG 5

Gebeurtenisse A en B is onderling uitsluitend. Dit word gegee dat:

- $P(B) = 2P(A)$
- $P(A \text{ of } B) = 0,57$

Bereken $P(B)$. (3)

Oplossing

$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) \dots A \text{ \& B is onderling uitsluitend}$

$\therefore 0,57 = \frac{1}{2} P(B) + P(B) \dots 2P(A) = P(B) \rightarrow$

$P(A) = \frac{1}{2} P(B)$

$\therefore 1,5 P(B) = 0,57$

$\therefore P(B) = 0,38 <$

Gebruik die **ONDERWERPGIDS** op bl. 147 (in die studiegids) om meer vrae oor hierdie afdeling te kies en te oefen.



UITDAGENDE VRAE & OPLOSSINGS: VRAESTEL 2

Trigonometrie

Identiteite & Saamgestelde Hoeke

VRAAG 1

1.1 Gegee: $\sin 16^\circ = p$

Bepaal die volgende in terme van p , **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**.

1.1.1 $\sin 196^\circ$ 1.1.2 $\cos 16^\circ$ (2)(2)

1.2 Gegee: $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

Gebruik die formule vir $\cos(A - B)$ om 'n formule vir $\sin(A + B)$ af te lei. (3)

1.3 Vereenvoudig $\frac{\sqrt{1 - \cos^2 2A}}{\cos(-A) \cdot \cos(90^\circ + A)}$ volledig, gegewe dat $0^\circ < A < 90^\circ$. (5)

1.4 Gegee: $\cos 2B = \frac{3}{5}$ en $0^\circ \leq B \leq 90^\circ$

Bepaal, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waarde van ELK van die volgende in sy eenvoudigste vorm:

1.4.1 $\cos B$ 1.4.2 $\sin B$ (3)(2)

1.4.3 $\cos(B + 45^\circ)$ (4) [21]

Oplossings

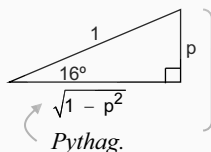
1.1.1 $\sin 196^\circ = \sin(180^\circ + 16^\circ) = -\sin 16^\circ = -p \quad \blacktriangleleft$

1.1.2 $\cos^2 16^\circ = 1 - \sin^2 16^\circ$
 $= 1 - p^2$

$\therefore \cos 16^\circ = \sqrt{1 - p^2} \quad \blacktriangleleft$

OF: $\sin 16^\circ = \frac{p}{1}$

$\therefore \cos 16^\circ = \sqrt{1 - p^2} \quad \blacktriangleleft$



Pythag.



Verwys na Formules & Afleidings van **Saamgestelde en Dubbelhoeke** op bl. v (in die studiegids).

1.2 Gegee: $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \cos[90^\circ - (A + B)] \\ &= \cos[(90^\circ - A) - B] \\ &= \cos(90^\circ - A)\cos B + \sin(90^\circ - A)\sin B \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

1.3
$$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 2A}}{\cos(-A) \cdot \cos(90^\circ + A)} = \frac{\sqrt{\sin^2 2A}}{\cos A \cdot (-\sin A)}$$

$$= \frac{\sin 2A}{-\sin A \cos A}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{-\sin A \cos A}$$

$$= -2 \quad \blacktriangleleft$$

1.4 Gegee: $\cos 2B = \frac{3}{5}$

1.4.1 $2 \cos^2 B - 1 = \cos 2B$
 $\therefore 2 \cos^2 B = \cos 2B + 1$
 $= \frac{3}{5} + 1$
 $= \frac{8}{5}$
 $\therefore \cos^2 B = \frac{4}{5}$
 $\therefore \cos B = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \blacktriangleleft \quad \dots 0^\circ \leq B \leq 90^\circ$

1.4.2 $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$
 $= 1 - \frac{4}{5}$
 $= \frac{1}{5}$
 $\therefore \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \blacktriangleleft$

1.4.3 $\cos(B + 45^\circ) = \cos B \cos 45^\circ - \sin B \sin 45^\circ$
 $= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
 $= \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \blacktriangleleft$

VRAAG 2

2.1 Bewys die identiteit:

$$\cos^2(180^\circ + x) + \tan(x - 180^\circ) \sin(720^\circ - x) \cos x = \cos 2x \quad (5)$$

2.2 Gebruik $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ om die formule vir $\sin(\alpha - \beta)$ af te lei. (3)

2.3 Indien $\sin 76^\circ = x$ en $\cos 76^\circ = y$, toon aan dat $x^2 - y^2 = \sin 62^\circ$, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik. (4) [12]

Oplossings

2.1 LK $= (-\cos x)^2 + (\tan x)(-\sin x)\cos x$
 $= \cos^2 x - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{1}\right)\left(\frac{\cos x}{1}\right)$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x$
 $= \cos 2x$
 $= \text{RK} \quad \blacktriangleleft$

2.2 $\sin(\alpha - \beta) = \cos[90^\circ - (\alpha - \beta)]$
 $= \cos[90^\circ - \alpha + \beta]$
 $= \cos[(90^\circ - \alpha) + \beta]$
 $= \cos(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta \quad \dots \text{vanaf die gegewe formule}$
 $= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \blacktriangleleft$

2.3 $x^2 - y^2$
 $= \sin^2 76^\circ - \cos^2 76^\circ$
 $= \cos^2 14^\circ - \sin^2 14^\circ \quad \dots \left[\begin{array}{l} \text{OF} = -(\cos^2 76^\circ - \sin^2 76^\circ) \\ = -\cos 2(76^\circ) \\ = -\cos 152^\circ \\ = -(-\cos 28^\circ) \\ = \cos 28^\circ, \text{ ens.} \end{array} \right]$
 $= \cos 2(14^\circ)$
 $= \cos 28^\circ$
 $= \sin(90^\circ - 28^\circ)$
 $= \sin 62^\circ \quad \blacktriangleleft$

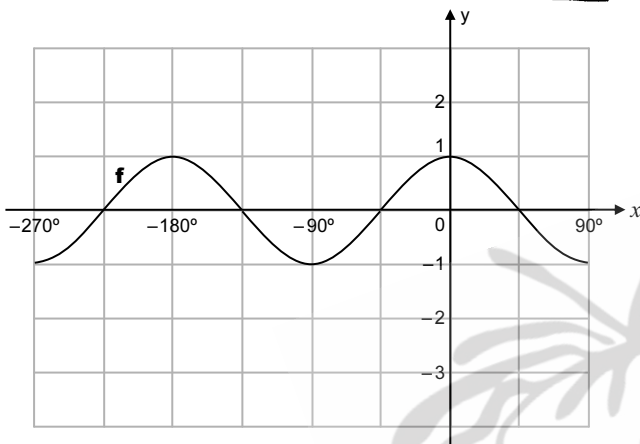
Gebruik die **Trig Opsomming** – sien bl. vi (in die studiegids) – om hierdie onderwerp te bemeester!



Grafieke & Vergelykings & Saamgestelde Hoeke

VRAAG 3

In die diagram is die grafiek van $f(x) = \cos 2x$ vir die interval $x \in [-270^\circ; 90^\circ]$ geskets.



3.1 Skets die grafiek van $g(x) = 2 \sin x - 1$ vir die interval $x \in [-270^\circ; 90^\circ]$ op die rooster. Toon AL die afsnitte met die asse, asook die draaipunte.

3.2 Gestel A is 'n snytpunt van die grafieke van **f** en **g**. Toon dat die x -koördinaat van A die vergelyking $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ bevredig.

3.3 Bereken vervolgens die koördinate van die snytpunte van grafieke van **f** en **g** vir die interval $x \in [-270^\circ; 90^\circ]$.



Onthou dubbelhoekformules:

Daar is **3** moontlike uitbreidings vir **cos 2x**.

In hierdie vraag kies ons die een wat (net) **sin x** in het, sodat ons by 'n kwadratiese vergelyking in $\sin x$ kan uitkom. Sien ook V5.2 op die volgende bladsy & V10.2 op bl. 28.

Oplossings

3.1

Wanneer 'n grafiek geskets word, hou in gedagte:

• **die vorm** ... sinus- & kosinusgrafieke is golfvormig/golwend

• **die kritieke punte** (maklikste om te kry met punt-vir-punt-stipping).

sin x:

1	1	Hoek x	-270°	-180°	-90°	0°	90°
1/2	1/2	sin x	1	0	-1	0	1
0	0	2 sin x	2	0	-2	0	2
-1/2	-1/2	2 sin x - 1	1	-1	-3	-1	1
-1	-1						

↑ Leer & verstaan hierdie kritieke waardes. Jy sal die tabel in jou kop kan doen!

Let op die gegewe definisieversameling: $-270^\circ \leq x \leq 90^\circ$

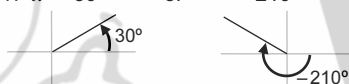
• **x-afsnitte:**

$$2 \sin x - 1 = 0 \quad \dots \text{waar } y = 0$$

$$\therefore 2 \sin x = 1$$

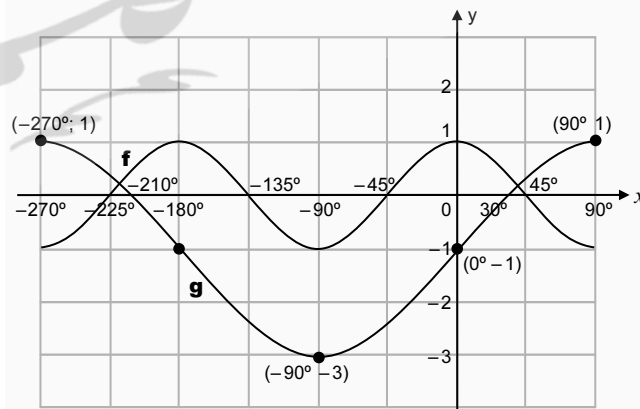
$$\therefore \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 30^\circ \quad \text{of} \quad -210^\circ$$



• **Parameters:** $y = a \sin(k(x + p)) + q$

Die uitwerkings van **a**, **k**, **p** en **q** is handig as 'n hulpmiddel om te toets, maar moeilik vir akkuraatheid as 'n aanvanklike metode.



3.2 By die snytpunte, $f(x) = g(x)$

$$\cos 2x = 2 \sin x - 1$$

die oplossings van hierdie vgl. is die x -koördinate van die snytpunte van **f** & **g**.

$$\therefore 1 - 2 \sin^2 x = 2 \sin x - 1 \quad \dots \text{dubbelhoekformule}$$

$$\therefore -2 \sin^2 x - 2 \sin x + 2 = 0 \quad \dots \text{'n kwadratiese vgl. in sin x}$$

$$+(-2) \therefore \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad \dots \text{kwadratiese formule benodig!}$$

$$\therefore \sin x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots a = 1; b = 1; c = -1$$

$$= \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \quad \dots \text{dis die veiligste om hakies te gebruik met instelling}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{of} \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

sin x het net waardes vanaf -1 tot +1.

$$\text{Maar } \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ is } < -1$$

Ons skryf:

$\therefore$ hierdie oplossing is ongeldig

Vir alle waardes van x , $-1 \leq \sin x \leq 1$.

$\therefore$ Die x -koördinaat van (enige) snytpunt van **f** en **g**

sal die vergelyking $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ bevredig <

3.3 Nou, om die x -koördinate van die 2 snytpunte van **f** en **g** oor die gegewe definisieversameling vas te stel:

$$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$= +0,62$$

sin x is pos. in kwadrante I & II



$$\therefore x = 38,17^\circ + n(360^\circ) \quad \text{of} \quad x = 180^\circ - 38,17^\circ + n(360^\circ), n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = 38,17^\circ \quad \text{of} \quad -218,17^\circ \quad \leftarrow n = -1 \text{ gee 'n waarde in die definisieversameling}$$



En nou, die **y**-koördinate ...

$$y = \cos 2x \quad \text{of} \quad 2 \sin x - 1 \quad \dots f(x) \text{ of } g(x)$$

$$= 0,24 \quad (\text{vir beide waardes van } x)$$

$\therefore$ Die snytpunte is:

$$(-218,17^\circ; 0,24) \text{ en } (38,17^\circ; 0,24) <$$

VRAESTEL 2: TRIGONOMETRIE

Oppervlakte-, Sinus- & Kosinusreëls: BEWYSE

1 Die Oppervlaktereël

$$\text{Oppv. van } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$$

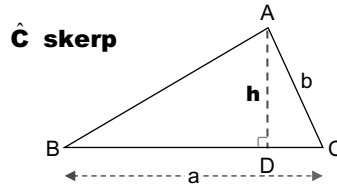
Konstruksie: Trek $AD \perp BC$

Bewys: Oppervlakte van $\triangle ABC = \frac{1}{2} ah$... ①

$$\text{Maar, in } \triangle ACD: \frac{h}{b} = \sin C$$

$$\therefore h = b \sin C \quad \dots ②$$

② in ①: $\therefore$ Oppervlakte van $\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$



2 Die Sinusreël

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Konstruksie: Trek $CD \perp AB$

Bewys: In $\triangle ADC$: $\frac{h}{b} = \sin A$
 $\therefore h = b \sin A \quad \dots ①$

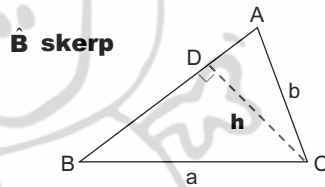
In $\triangle BDC$: $\frac{h}{a} = \sin B$
 $\therefore h = a \sin B \quad \dots ②$

Gelykstelling van ① & ②: $\therefore b \sin A = a \sin B$

$$\div ab) \quad \therefore \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Net so, deur 'n loodlyn vanaf **B** te trek, kan 'n mens bewys: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

$$\therefore \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



3 Die Kosinusreël

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Konstruksie: Trek $CD \perp BA$

Bewys: $a^2 = BD^2 + h^2 \quad \dots \text{Pythagoras}$

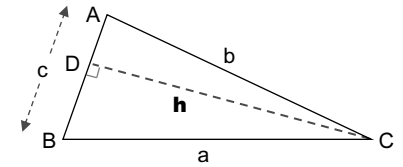
$$\begin{aligned} \therefore a^2 &= (c - AD)^2 + h^2 \\ &= c^2 - 2c \cdot AD + AD^2 + h^2 \\ &= c^2 - 2c \cdot AD + b^2 \quad \dots \text{Pythagoras} \\ &= b^2 + c^2 - 2c \cdot AD \quad \dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle ADC: \frac{AD}{b} &= \cos A \\ \therefore AD &= b \cos A \quad \dots ② \end{aligned}$$

② in ①:

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

A skerp:



Vir KONSTRUKSIES in al 3 bewyse,

Oppervlaktereël, Sinusreël & Kosinusreël



Konstrueer altyd die hoogte vanaf 'n hoekpunt wat nie deel is van die formule nie

- Om te bewys: Oppervlakte $= \frac{1}{2} ab \sin C$, trek 'n hoogtelyn vanaf **A** of **B**, nie **C** nie.
- Om te bewys: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$, trek 'n hoogtelyn vanaf **C**, nie **A** of **B** nie.
- Om te bewys: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, trek 'n hoogtelyn vanaf **B** of **C**, nie **A** nie.



ANALITIESE MEETKUNDE 'TOOLKIT'

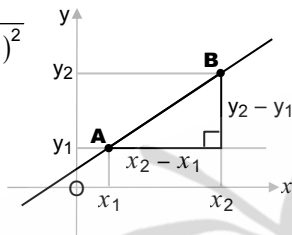
FORMULES

Beskou twee punte $A(x_1; y_1)$ en $B(x_2; y_2)$:

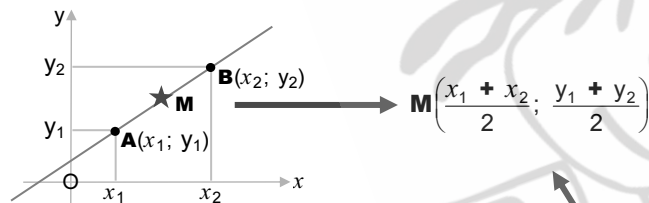
AFSTAND

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$... Stelling van Pythagoras

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

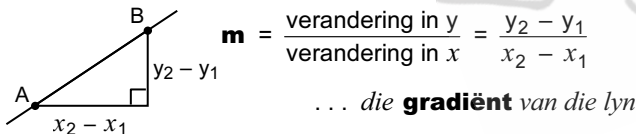


MIDDELPUNT



Die koördinate van die middelpunt, M , is die **gemiddeldes** van die koördinate van die eindpunte, A en B .

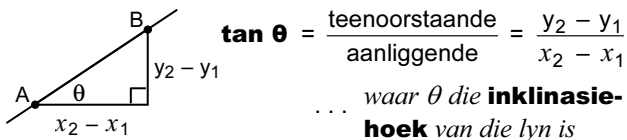
GRADIËNT



$$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

... die **gradiënt** van die lyn

Net so:

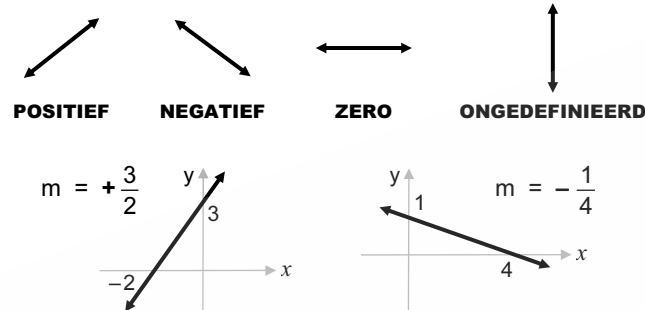


$$\tan \theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aanliggende}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

... waar θ die **inklinasiehoek** van die lyn is

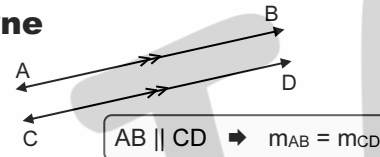
Die Gradiënt van 'n lyn

Waardes

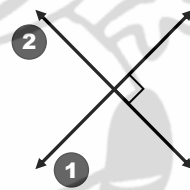


Ewewydige lyne

Ewewydige lyne het **gelyke** gradiënte.



Loodlyne



As die gradiënt van lyn 1 $\frac{2}{3}$ is, dan sal die gradiënt van lyn 2 $-\frac{3}{2}$ wees.

$$\text{Let wel: } m_1 \times m_2 = \left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

d.w.s. Die **produk** van die gradiënte van $\perp$ lyne is **-1**.

Kollineêre punte



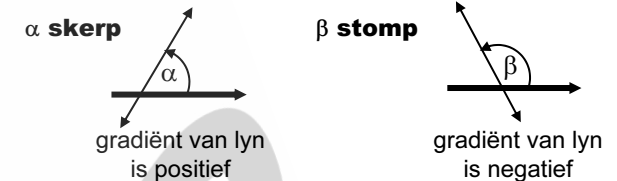
Drie punte A, B & C is kollineêr as die gradiënte van **AB & AC** gelyk is. (Let wel: Punt **A** is gemeen.)

$$m_{AB} = m_{AC} \iff A, B \text{ \& C is kollineêr}$$

Die Inklinasie van 'n lyn

Hoeke α en β hieronder is **inklinasiehoeke**.

Die inklinasie van 'n lyn is die **hoek** wat die lyn met die positiewe rigting van die x -as maak.



Gradiënt, $m = \tan \alpha$ of $\tan \beta$ waar α en β die **inklinasie** $\angle^e$ is.

Grafieke in die algemeen

3 Basiese feite

1 : As-afsnitte

Elke punt op die **y-as** het **$x = 0$** .
Elke punt op die **x-as** het **$y = 0$** .

2 : Die vergelyking

Die **vergelyking** van 'n grafiek is waar vir **alle** punte op die grafiek.

$\therefore$ Die **vergelyking** van die **y-as** is **$x = 0$** ;
& die **vergelyking** van die **x-as** is **$y = 0$** .

3 : Tipes grafieke

Verskillende **tipes/patrone** word deur verskillende vergelykings aangedui.

bv. **$y = mx + c$** dui 'n reguitlyn aan

$x^2 + y^2 = r^2$ dui 'n sirkel aan



Belangrike Feite

FEIT 1: Punte op Grafieke

As 'n punt op 'n grafiek lê, is die vergelyking waar vir sy koördinate, d.w.s. die koördinate van die punt bevredig die vergelyking ... so, stel in!
en, omgekeerd,

As 'n punt (d.w.s. sy koördinate) die vergelyking van 'n grafiek bevredig (d.w.s. 'dit waar maak'), dan lê dit op die grafiek.

FEIT 2: Snypunt(e)

Die koördinate van die snypunt(e) van twee grafieke 'voldoen aan die voorwaardes' van albei grafieke, d.w.s. hulle bevredig albei vergelykings gelyktydig. Hulle word verkry:

- 'algebraïes' deur die 2 vergelykings op te los, of
- 'grafies' deur van die grafiek af te lees.

HIERDIE 2 FEITE IS DEURSLAGGEWEND!

REGUITLYNGRAFIEKE & hul vergelykings

Standaardvorme

Standaardvorme van die vergelyking van 'n reguitlyn:

▪ $y = mx + c$:

waar **m** = die gradiënt & **c** = die y-afsnit

Wanneer $m = 0$: $y = c$... 'n lyn || **x-as**

Wanneer $c = 0$: $y = mx$... 'n lyn deur die **oorsprong**

Net so: $x = k$... 'n lyn || **y-as**

▪ $y - y_1 = m(x - x_1)$:

waar **m** = die gradiënt & $(x_1; y_1)$ is 'n vaste punt.

Algemene vorm

Die **algemene vorm** van die vergelyking van 'n reguitlyn is $ax + by + c = 0$, bv. $2x + 3y + 6 = 0$

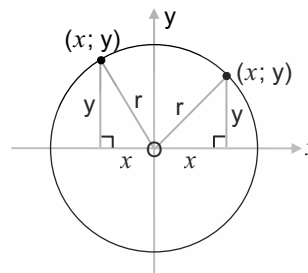
SIRKELS & hul vergelykings

Sirkels met die oorsprong as midpt.

Waar van enige punt $(x; y)$
op 'n sirkel met
middelpunt $(0; 0)$ en
radius **r** is dat:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Stelling van Pythag.!

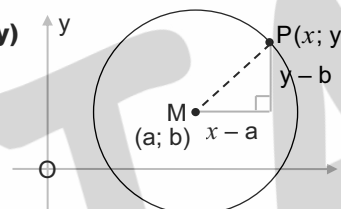


Sirkels met enige gegewe midpt.

Waar van enige punt $(x; y)$
op 'n sirkel met
middelpunt $(a; b)$ en
radius **r** is dat:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Afstandsformule! (Stelling van Pythag.)



Herlei van die vergelyking van 'n sirkel

Algemene vorm: $Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$

na **Standaardvorm:** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
(deur voltooiing van vierkante)

bv. $x^2 - 6x + y^2 + 8y - 25 = 0$

$\therefore x^2 - 6x + y^2 + 8y = 25$

$\therefore x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + 8y + 4^2 = 25 + 9 + 16$

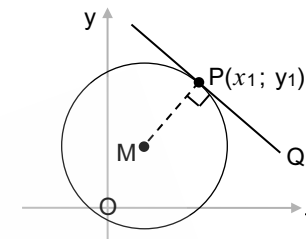
$\therefore (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 50$

Dit is die vergelyking van 'n sirkel met:

midpt. $(3; -4)$ & **radius**, $r = \sqrt{50} (= 5\sqrt{2})$ eenhede

'n Raaklyn aan 'n sirkel . . .

is loodreg op die radius van die sirkel by die raakpunt.



bv. $m_{MP} = 2 \Rightarrow m_{PQ} = -\frac{1}{2}$
($\therefore$ radius MP $\perp$ raaklyn PQ)

Om die vergelyking van 'n raaklyn te bepaal, gebruik 'm en 1 punt' in die reguitlynvergeliking:
 $y - y_1 = m(x - x_1)$

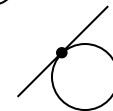
Snypunt(e) van 'n Lyn en 'n Sirkel

'n Lyn en 'n sirkel **óf**

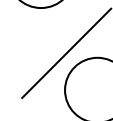
1 'sny' (twee keer!) [snylyn]
(2 punte in gemeen)



of 2 'raak' (een keer!) [raaklyn]
(1 punt in gemeen)



of 3 sny of raak glad nie
(geen punte in gemeen nie)



As ons $y = mx + c$ in die vergelyking van die $\odot$ instel,

sal daar **óf**: 1 2 oplossings

of 2 1 oplossing

of 3 geen oplossings

vir x wees nie, wat een van die bostaande scenario's tot gevolg sal hê.



LAASTE RAAD

Gebruik jou gesonde verstand
& **MAAK ALTYD 'N SKETS !!!**