

Wiskunde

KLASTEKS & STUDIEGIDS

Anne Eadie & Gretel Lampe

GRAAD

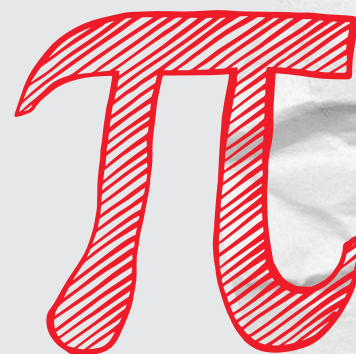
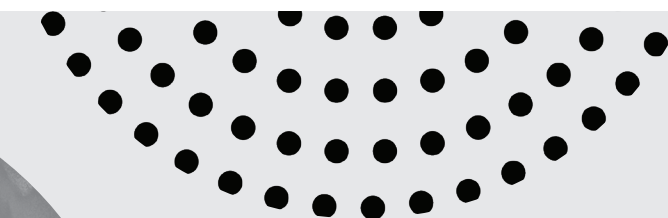
11

KABV

3-in-1



THE
ANSWER
SERIES *Your Key to Exam Success*



Graad 11 **Wiskunde** 3-in-1 KABV

KLASTEKS & STUDIEGIDS

Hierdie Graad 11 Wiskunde 3-in-1 studiegids neem jou stapsgewys deur die KABV-kurrikulum. Dit help jou om noodsaaklike konsepte van vorige grade te hersien, wat jy sal bemeester voordat jy nuwe werk met selfvertroue aanpak.

Sleutelkenmerke:

- Omvattende, verduidelikende notas en uitgewerkte voorbeelde vir elke onderwerp
- Gegradeerde oefeninge om logika te bevorder en tegniek te ontwikkel
- Gedetailleerde oplossings vir alle oefeninge
- 'n Eksamen met oplossings, ten volle verduidelik (Vraestel 1 en Vraestel 2), vir deeglike vaslegging en finale eksamenvoorbereiding

Hierdie studiegids sal ongetwyfeld vir elke leerder wat vir hul Graad 11 en 12 Wiskunde-eksamens voorberei, 'n stewige grondslag bied, wat beslis toekomsdeure sal oopmaak!

GRAAD

11

KABV

3-in-1

Wiskunde

Anne Eadie & Gretel Lampe

Ook beskikbaar

**GRAAD 11
WISKUNDE V & A**

10 addisionele, uitdagende
oefeneksamen vraestelle & antwoorde



HIERDIE HANDBOEK & STUDIEGIDS SLUIT IN

- 1 Omvattende Notas
- 2 Oefeninge
- 3 Volledige Oplossings
(beskikbaar in 'n aparte boekie)

*Plus **bonus** Eksamen vraestelle en -memo's*

eBoek
beskikbaar 

INHOUD

Die Ware Pad na sukses in Matriek Wiskunde

Die Eksamen

Die Kurrikulum (KABV): Oorsig van Onderwerpe



MODULES

	Vraestel ↓	Notas & V'e
1 Getalle & Grondbeginsels	1	1.1
2 Eksponente & Wortelvorme	1	2.1
3 Algebraïese uitdrukkings, vergelykings & ongelykhede	1	3.1
4 Getalpatrone	1	4.1
5 Analitiese Meetkunde	2	5.1
6 Funksies & Grafieke	1	6.1
6a: Algebraïese grafieke		6.1
6b: Trigonometriese grafieke	2	6.33
7 Trigonometrie (Deel 1) - Algemeen	2	7.1
Trigonometrie Opsomming		7.24
8 Meting	2	8.1

Vraestel



Notas & V'e

9 Euklidiese Meetkunde	2	9.1
9a: Hersiening van vorige grade		9.1
9b: Sirkelmeetkunde		9.6
10 Trigonometrie (Deel 2)	2	10.1
Oppv., Sinus- en Kosinusreëls		
11 Finansies, Groei & Verval	1	11.1
12 Waarskynlikheid	1	12.1
13 Statistiek	2	13.1

Belangrike raad vir eksamenvoorbereiding

EKSAMENVRAESTELLE

Oefen en bestudeer die volgende twee eksamenvraestelle baie sorgvuldig:

Nasionaal Gr 11 Eksemplaar

Vraestelle

Memo's

Vraestel 1

V1

M1

Vraestel 2

V3

M5



Groepering van Sirkelmeetkunde Stellings

i

Omgekeerde Stellings in Sirkelmeetkunde

ii

Analitiese Meetkunde: 'Toolkit'

iii

Euklidiese Meetkunde: Stellings & Aanvaarbare Redes

iv

Sakrekenaarinstruksies

vii

DBO/IEB Formula-/Inligtingsblad

viii

Algebraïese Uitdrukkings en Vergelykings

Dit is uiters belangrik om te onderskei tussen uitdrukkings en vergelykings. Kyk na die volgende voorbeelde.



Uitdrukkings

- Vereenvoudig: $\frac{x}{2} + 3$

$$\frac{x}{2} + 3 = \frac{x+6}{2}$$

Moenie vermenigvuldig nie.

- Vermenigvuldig: $(x-2)(x+5)$

$$\begin{aligned} (x-2)(x+5) & \dots \text{faktore} \\ = x^2 - 2x + 5x - 10 \\ = x^2 + 3x - 10 & \dots \text{terme} \end{aligned}$$

↑ Let op die = tekens.

Die waarde van die uitdrukking moenie verander nie.

- Faktoriseer: $x^2 - 9$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 & \dots \text{terme} \\ = (x+3)(x-3) & \dots \text{faktore} \end{aligned}$$

↑ Let op die 'is gelyk aan' tekens (=) aan die linkerkant.

- Faktoriseer: $-2x^2 + 14x - 24$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 14x - 24 & \dots \text{'n drieterm} \\ = -2(x^2 - 7x + 12) \\ = -2(x-4)(x-3) \end{aligned}$$

Behou die waarde; hou dus die **-2**

Vergelykings

- Los op vir x : $\frac{x}{2} + 3 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 3 & = 0 \\ \times 2) \quad \therefore x + 6 & = 0 \\ \therefore x & = -6 \dots \text{'n oplossing} \end{aligned}$$

Vermenigvuldig

- Los op vir x : $(x-2)(x+5) = 0$

Moenie vermenigvuldig nie. Jy het die faktore nodig vir 'n nulproduk:

$$\begin{aligned} (x-2)(x+5) & = 0 \\ \therefore x-2 & = 0 \text{ of } x+5 = 0 \\ \therefore x & = 2 \quad \therefore x = -5 \end{aligned}$$

↑ Let op die $\therefore$ tekens.

logika



- Los op vir x : $x^2 - 9 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Metode 1: } (x+3)(x-3) & = 0 \\ \therefore x+3 & = 0 \text{ of } x-3 = 0 \\ \therefore x & = -3 \quad \therefore x = 3 \end{aligned}$$

Metode 2:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 & = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \\ \therefore x & = \pm 3 \end{aligned}$$

- Los op vir x : $-2x^2 + 14x - 24 = 0$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 14x - 24 & = 0 \\ \div (-2) \quad \therefore x^2 - 7x + 12 & = 0 \\ \therefore (x-4)(x-3) & = 0 \\ \therefore x & = 4 \text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

Logika laat jou toe om albei kante van die vergelyking deur **-2** te **DEEL**.

- Faktoriseer: $3x^2 - 6x$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x & \dots \text{terme} \\ = 3x(x-2) & \dots \text{faktore} \end{aligned}$$

Die uitdrukking is ontvorm deur 'n **gemene faktor** uit te haal en dit te **behou**!



- Evalueer: $x^2 - x - 6$

(a) as $x = -3$ & (b) as $x = -2$

$$\begin{aligned} \text{(a) As } x & = -3: x^2 - x - 6 \\ & = (-3)^2 - (-3) - 6 \\ & = 9 + 3 - 6 \\ & = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) As } x & = -2: x^2 - x - 6 \\ & = (-2)^2 - (-2) - 6 \\ & = 4 + 2 - 6 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Hier bepaal ons die waarde van die uitdrukking vir verskeie waardes van x

Is daar 'n ander waarde van x waarvoor die uitdrukking $x^2 - x - 6$ gelyk aan nul sal wees?



Wat is die 'ander wortel' dus? En, hoekom?

Wys dat $x = 3$ 'n wortel is, d.w.s. toets dat $x = 3$ die vergelyking waar maak:

$$\begin{aligned} \text{Wanneer } x & = 3: x^2 - x - 6 \\ & = 3^2 - 3 - 6 \\ & = 9 - 9 \\ & = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ **Die stelling:** $x^2 - x - 6 = 0$ is waar wanneer $x = 3$

$\therefore 3$ is die 'ander wortel'



- Los op vir x : $3x^2 - 6x = 0$

$$3x^2 - 6x = 0$$

Deel slegs **deur 3**, nie $3x$ nie

$$\begin{aligned} \div 3) \quad \therefore x^2 - 2x & = 0 \\ \therefore x(x-2) & = 0 \\ \therefore x & = 0 \text{ of } x-2 = 0 \\ \therefore x & = 2 \end{aligned}$$

As ons deur x gedeel het, sou ons hierdie oplossing gemis het!

- Gegee die vergelyking: $x^2 - x - 6 = 0$

(a) Is -3 'n wortel? (b) Is -2 'n wortel?

$$\begin{aligned} \text{(a) As } x & = -3: x^2 - x - 6 \neq 0 \text{ (sien lk)} \\ \therefore \text{Nee, dit is nie 'n wortel nie} \\ \text{(b) As } x & = -2: x^2 - x - 6 = 0 \text{ (sien lk)} \\ \therefore \text{Ja, dit is 'n wortel} \end{aligned}$$

Hier toets ons die waarheid van die bewering dat:

$$x^2 - x - 6 \text{ moet } = 0$$

'n Wortel is 'n waarde van x wat hierdie stelling waar maak.

- Los die vergelyking $x^2 - x - 6 = 0$ op:

$$\begin{aligned} \therefore (x-3)(x+2) & = 0 \\ \therefore x & = 3 \text{ of } x = -2 \end{aligned}$$

Aard van die wortels

Die **aard** van die wortels van 'n kwadratiese vergelyking beteken die **tipe getal** wat die wortels is en die **aantal wortels**.

Beskou die aard van die wortels in die volgende 4 gevalle:

Uitgewerkte Voorbeeld

Pas die formule toe om die wortels van die volgende vergelykings te kry:

LW: Skryf alle vergelykings eers in standaardvorm.

Die Vergelyking: $ax^2 + bx + c = 0$ **Die Wortels:** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(a) $x^2 + 3 = x$
 $\therefore x^2 - x + 3 = 0$
 $\therefore a = 1 ; b = -1 ; c = 3$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$
 $= \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$ ← -11 is problematies!
 $\sqrt{-11}$ is nie-reëel.



Die wortels is nie-reëel
d.w.s. Daar is geen reële wortels nie.

(b) $-x^2 + 6x - 5 = 0$
 $\times (-1) \therefore x^2 - 6x + 5 = 0$
 $\therefore a = 1 ; b = -6 ; c = 5$

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$
 $= \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$ ← 16 is 'lekker'. Dit is 'n volkome vierkant!
 $= \frac{6 \pm 4}{2}$
 $= \frac{10}{2}$ of $\frac{2}{2}$
 $= 5$ of 1



Daar is 2 wortels wat reëel en rasionaal is.

(c) $4x^2 + 6x - 8 = 0$
 $2x^2 + 3x - 4 = 0$
 $\therefore a = 2 ; b = 3 ; c = -4$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$
 $= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$ ← 41 is 'OK' omdat $\sqrt{41}$ bestaan, maar dit is irrasionaal.



Daar is 2 wortels wat reëel en irrasionaal is.

$\approx 0,85$ of $-2,35$

(d) $4x + \frac{1}{x} = 4$

$\times x) \therefore 4x^2 - 4x + 1 = 0$
 $\therefore a = 4 ; b = -4 ; c = 1$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8}$ ← $\sqrt{0} = 0$ dus is die wortels dieselfde!

$= \frac{4 \pm 0}{8}$

$= \frac{1}{2} + 0$ of $\frac{1}{2} - 0$

$= \left(\frac{1}{2}\right)$



Daar is slegs 1 wortel, of, ons sê, die wortels is gelyk. 'Hulle' is ook reëel & rasionaal.

Delta is Dinamiet!
... Hoekom?



Die Diskriminant, Δ (Delta)

$\Delta = b^2 - 4ac$ en is die deel van die formule wat onder die $\sqrt{\quad}$ teken is.

$\therefore$ Die wortels van $ax^2 + bx + c = 0$ is $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ en $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Δ het 'n kritieke impak op die aard van die wortels vanweë sy posisie:

- ▶ onder die $\sqrt{\quad}$ teken, en
- ▶ in die enigste term waar die wortels verskil

Die Moontlikhede vir Δ	Die Aard van die Wortels
I $\Delta < 0$, bv. $\Delta = -16$	nie-reëel (<i>geen reël wortels nie</i>)
II $\Delta \geq 0$	reëel
$\Delta = 0$	reëel & gelyk (<i>slegs 1 wortel</i>)
$\Delta > 0$	reëel & ongelyk (<i>2 wortels</i>)
• $\Delta > 0$ & 'n volkome vierkant bv. $\Delta = 16$	reëel, rasionaal en ongelyk (<i>2 wortels</i>)
• $\Delta > 0$ & nie 'n volkome vierkant nie bv. $\Delta = 20$	reëel, irrasionaal en ongelyk (<i>2 wortels</i>)

LW: $\Delta = b^2 - 4ac$ waar die waardes van **a**, **b** en **c** bepaal word vanaf die standaardvorm van die vergelyking, $ax^2 + bx + c = 0$. Dus:

Stap 1: Skryf die vergelyking in sy standaardvorm.

Stap 2: Bereken Δ , die diskriminant.

Stap 3: Beskryf die aard van die wortels.

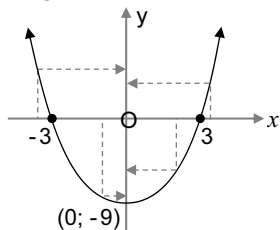
Kwadratiese Ongelykhede

Die Parabool

Die parabool gee 'n prentjie van al die moontlike waardes van 'n kwadratiese uitdrukking.

bv. $y = x^2 - 9$

LW:
 $x^2 - 9$
is y



Onthou:

Die y-afsnit: (0; -9)
(Stel $x = 0$)

Die x-afsnitte: $x^2 - 9 = 0$
(Stel $y = 0$) $\therefore (x + 3)(x - 3) = 0$
 $\therefore x = -3$ of 3

- Let Wel:
- Die x-afsnitte (of wortels) van die parabool is die wortels van die vergelyking $x^2 - 9 = 0$. Hierdie wortelwaardes is die waardes wat gebruik word om die TEKEN van $x^2 - 9$ te bepaal (sien hieronder);
 - Die waardes van $x^2 - 9$ word op die y-as afgelees.

Die TEKEN van $x^2 - 9$: nul, positief of negatief, vir verskeie waardes van x

Lees vanaf die grafiek, vir die waardes van x vanaf links na regs, die teken van $x^2 - 9$ af:

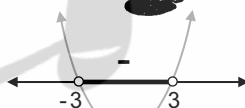
- As $x = -3$ of 3 : $x^2 - 9$ is gelyk aan nul ... op die x-as
- As $x < -3$: $x^2 - 9$ is positief ... bokant die x-as
- As $-3 < x < 3$: $x^2 - 9$ is negatief ... onderkant die x-as
- As $x > 3$: $x^2 - 9$ is positief ... bokant die x-as



$y = 0$ vir $x = -3$ of 3



$y > 0$ vir $x < -3$ of $x > 3$



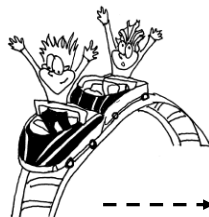
$y < 0$ vir $-3 < x < 3$

Gebruik parabole om die volgende kwadratiese vergelykings en ongelykhede op te los:

$x^2 - 16 = 0$	$x^2 - 12 = 0$	$x^2 = 0$	$x^2 + 2 = 0$
$x^2 - 16 > 0$	$x^2 - 12 > 0$	$x^2 > 0$	$x^2 + 2 > 0$
$x^2 - 16 < 0$	$x^2 - 12 < 0$	$x^2 < 0$	$x^2 + 2 < 0$

Die vergelykings van die parabole:

$y = x^2 - 16$	$y = x^2 - 12$	$y = x^2$	$y = x^2 + 2$
----------------	----------------	-----------	---------------



Met die teken van die uitdrukking gegee, bepaal die waardes van x.

Beskou die volgende uitdrukkings en gebruik sketse om die waardes van x te bepaal waarvoor die uitdrukkings positief, nul of negatief is.

y:	$x^2 - 16$	$x^2 - 12$	x^2	$x^2 + 2$
Die skets:				
Die teken van y:	$y = x^2 - 16$	$y = x^2 - 12$	$y = x^2$	$y = x^2 + 2$
y = 0 vir:	$x = \pm 4$	$x = \pm \sqrt{12}$	$x = 0$	geen waardes van x nie
y > 0 vir:	$x < -4$ of $x > 4$	$x < -\sqrt{12}$ of $x > \sqrt{12}$	alle x behalwe $x = 0$	alle x
y < 0 vir:	$-4 < x < 4$	$-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$	geen waardes van x nie	geen waardes van x nie

Uitgewerkte Voorbeeld 1

Los op vir x in die volgende vergelykings en ongelykhede:

1. $x^2 - 25 = 0$

Wenk: Skets die grafiek $y = x^2 - 25$

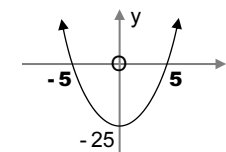


2. (a) $x^2 - 25 < 0$ (b) $x^2 - 25 > 0$ (c) $x^2 - 25 \leq 0$ (d) $x^2 - 25 \geq 0$

Antwoorde

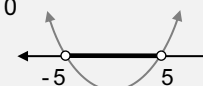
1. $(x + 5)(x - 5) = 0$
 $\therefore x = -5$ of 5

Die skets: $y = x^2 - 25$



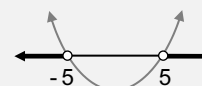
2. (a) $(x + 5)(x - 5) < 0$

$-5 < x < 5$



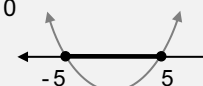
(b) $(x + 5)(x - 5) > 0$

$x < -5$ of $x > 5$



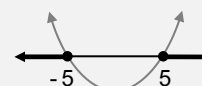
(c) $(x + 5)(x - 5) \leq 0$

$-5 \leq x \leq 5$



(d) $(x + 5)(x - 5) \geq 0$

$x \leq -5$ of $x \geq 5$



Kontrolelysie van Gereedskap

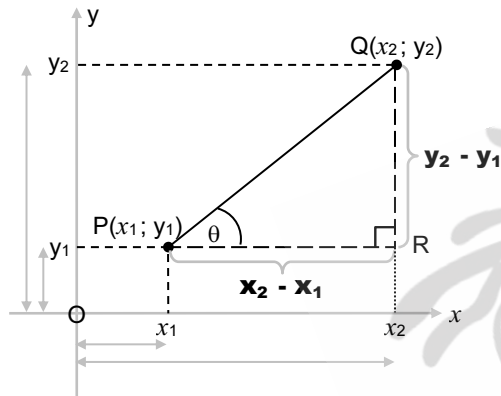
Beskou 4 'laaie' van gereedskap - almal BASIESE FEITE. Gebruik hierdie om die sketse te analiseer, te redeneer, bereken, bewys . . .



Afstand, Middelpunt & Gradiënt

LW: Hou **Geval 1**, **Geval 2**, en **Geval 3** op bladsy 5.6 & 5.7 in gedagte.

Vir enige twee vaste punte, $P(x_1; y_1)$ & $Q(x_2; y_2)$



Let Wel:

Vertikale lengte $QR = y_2 - y_1$

Horisontale lengte $PR = x_2 - x_1$

θ is die inklinasiehoek van die lyn PQ

$$\tan \theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aanliggend}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

1 Afstand PQ . . .

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow PQ = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

die som van die vierkante!
(Pythag.)

2 Gradiënt PQ . . .

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (= \tan \theta)$$

verandering in y
verandering in x

3 Middelpunt van PQ . . .

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Gem. van die x'e & van die y's



Ewewydige lyne, Loodregte lyne & Kollineêre punte

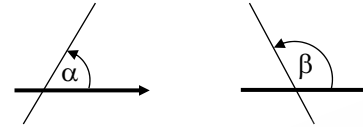
$$AB \parallel CD \iff m_{AB} = m_{CD}$$

$$AB \perp CD \iff m_{AB} = -\frac{1}{m_{CD}} \quad \dots \quad m_{AB} = -\frac{1}{m_{CD}} \quad \text{beteken ook: } m_{AB} \times m_{CD} = -1$$

$$A, B \text{ en } C \text{ is kollineêre punte} \iff m_{AB} = m_{AC}; \quad m_{AB} = m_{BC}; \quad m_{AC} = m_{BC}$$



Die Inklinasiehoek van 'n lyn



Die inklinasiehoek van 'n lyn is die hoek wat die lyn met die positiewe rigting van die x-as maak.

LW: As α of β die inklinasiehoek (in grade gemeet) is, dan is die gradiënt van die lyn $= \tan \alpha$ of $\tan \beta$ (wat 'n verhouding of 'n getal is).

$\therefore$ Gegee α of β , kan 'n mens **die gradiënt**: . . . **van 'n getal** bepaal

Of, gegee die gradiënt, kan 'n mens α of β bepaal: . . . **'n hoek** (in grade gemeet)



Vergelykings van lyne

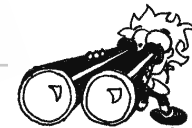
LW: Hou **Geval 1**, **Geval 2**, en **Geval 3** op bladsy 5.9 in gedagte.

• Standaardvorme:

- Algemeen: $y = mx + c$ of $y - y_1 = m(x - x_1)$
- $y = mx$. . . wanneer $c = 0$. . . lyne deur die oorsprong
- $y = c$. . . wanneer $m = 0$. . . lyne $\parallel$ x-as
- $x = k$. . . lyne $\parallel$ y-as

Bepaal die vergelyking van 'n lyn: Spesiale fokus

- deur 2 gegewe punte . . . bepaal m eerste
- deur 1 punt en $\parallel$ aan of $\perp$ op 'n gegewe lyn . . . stel m en die punt in.



die gradiënt

$$y = m \cdot x + c$$

die punt

ons benodig
• die gradiënt &
• 'n punt

die gradiënt

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

die punt

- Y-afsnitte en X-afsnitte:** Stel $x = 0$ en $y = 0$, onderskeidelik.

- Snypunt van 2 grafieke:**

Los die vergelykings van die grafieke gelyktydig op.

- As 'n punt op 'n lyn lê, is die vergelyking daarvoor waar, en, omgekeerd . . .**

As 'n punt die vergelyking van 'n lyn bevredig, lê die punt op die lyn.

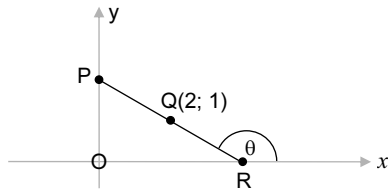
bv. As 'n lyn die vergelyking $y = x + 1$ het, dan kan al die punte op die lyn deur $(x; x + 1)$ voorgestel word.



OEFENING 5.3: Gemengde Oefening

Antwoorde op bladsy A5.2

1. $Q(2; 1)$ is die middelpunt van lynsegment PR. P is 'n punt op die y-as en R is 'n punt op die x-as.



Bereken:

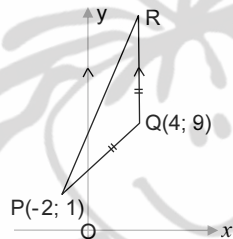
- 1.1 die koördinate van P en R
- 1.2 die lengte van PR (in vereenvoudigde wortelvorm)
- 1.3 die gradiënt van PR
- 1.4 θ , die inklinasiehoek van PR
- 1.5 die vergelyking van PR



2. $\triangle PQR$ is gelykbenig, met $PQ = QR$ en $QR \parallel$ die y-as.

Bereken:

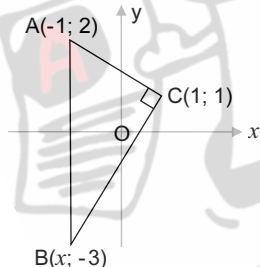
- 2.1 die lengte van PQ
- 2.2 die koördinate van R



3. A, B en C is drie punte in die Cartesiese vlak. $AC \perp BC$.

Bereken:

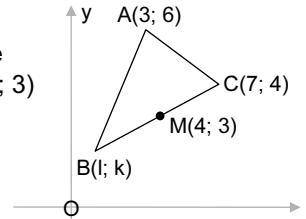
- 3.1 die gradiënt van AC
- 3.2 die waarde van x
- 3.3 die lengte van AB
- 3.4 die oppervlakte van $\triangle ABC$



4. Bepaal die numeriese waarde van k in elk van die volgende gevalle:

- 4.1 Die reguitlyn $y = 2x + 3$ is ewewydig aan die reguitlyn $2y - kx = 16$.
- 4.2 Punte $P(1; -3)$, $Q(4; 6)$ en $R(k; k)$ is kollineêr.

5. $A(3; 6)$, $B(1; k)$ en $C(7; 4)$ is die hoekpunte van 'n driehoek met $M(4; 3)$ die middelpunt van BC.

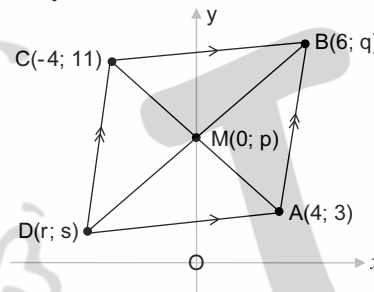


- 5.1 Bepaal die waarde van k.
- 5.2 As R die middelpunt van AC is, bewys dat
 - 5.2.1 $MR = \frac{1}{2} BA$, en
 - 5.2.2 $MR \parallel BA$



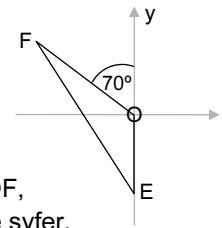
6. $A(4; 3)$, $B(6; q)$, $C(-4; 11)$ en $D(r; s)$ is die hoekpunte van 'n parallelogram.

Die hoeklyne sny by $M(0; p)$. Die vergelyking van AB is $y = 5x - 17$.



- 6.1 Bepaal die waardes van p, q, r en s.
- 6.2 Gebruik vervolgens die waardes in Vraag 6.1 verkry, bewys of $CA \perp DB$.
- 6.3 Lei af watter soort vierhoek ABCD is.

7. $\triangle EOF$ is geteken sodat O by die oorsprong is en E is 'n punt op die negatiewe y-as. OF maak 'n hoek van 70° met die y-as.

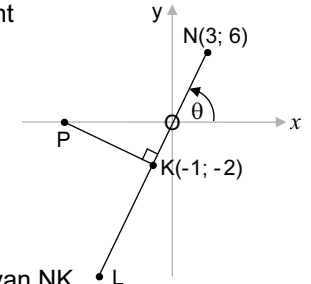


- 7.1 Bepaal die gradiënt van OF, afgerond tot een desimale syfer.
- 7.2 Bepaal die grootte van $\angle EOF$, afgerond tot een desimale syfer, as die gradiënt van EF $-\frac{3}{2}$ is.

8. $K(-1; -2)$ is die middelpunt van LN met $N(3; 6)$.

$PK \perp LN$ met P op die x-as.

Die inklinasiehoek van NL is θ .

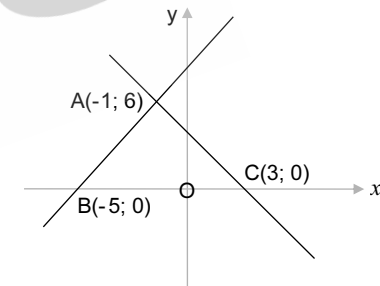


- 8.1 Bepaal:

- 8.1.1 die gradiënt van NK.
- 8.1.2 die gradiënt van PK.
- 8.1.3 die grootte van θ , afgerond tot een desimale syfer.
- 8.1.4 die koördinate van L.
- 8.1.5 die vergelyking van PK.
- 8.1.6 die koördinate van P.

- 8.2 Bepaal die vergelyking van die reguitlyn ewewydig aan PK en wat deur die oorsprong gaan.

9. BA en CA sny by $A(-1; 6)$.



- 9.1 Is lyn BA loodreg op lyn AC? Toon al jou bewerkings duidelik om jou jou antwoord te regverdig.
- 9.2 Bereken die grootte van $\angle ABC$ (afgerond tot een desimale syfer).
- 9.3 Bereken die lengte van AB. (Laat jou antwoord in vereenvoudigde wortelvorm.)
- 9.4 Toon dat $\triangle ABC$ gelykbenig is.
- 9.5 As A, B en D(a; 8) drie kollineêre punte is, bereken die waarde van a.



► 3 Algemene vorme van die vgl. van 'n parabool

Daar is twee ander vorme van die vergelyking van 'n parabool:

- Die 'wortelvorm': $y = a(x - A)(x - B)$, en
- Die 'standaardvorm': $y = ax^2 + bx + c$

Die 3 Algemene vorme is:		
Draaipuntvorm	Wortelvorm	Standaardvorm
$y = a(x - p)^2 + q$ <i>drpt. (p; q)</i>	$y = a(x - A)(x - B)$ <i>wortels A & B</i>	$y = ax^2 + bx + c$ <i>y-afsnit</i>

↓ Ons gebruik basiese feite en simmetrie om die as-afsnitte en die draaipunt in elke vorm te bepaal.

► Die draaipuntvorm van die vergelyking: $y = a(x - p)^2 + q$

- **Die y-afsnit**
Stel $x = 0$
- **Die x-afsnit(te)**
Stel $y = 0$
- **Die draaipunt**
Lees die draaipunt van die vergelyking af

► Die 'wortelvorm' van die vergelyking: $y = a(x - A)(x - B)$

- **Die y-afsnit**
Stel $x = 0$: $y = a(0 - A)(0 - B)$
- **Die x-afsnit(te) . . .**
Stel $y = 0 \Rightarrow a(x - A)(x - B) = 0 \Rightarrow \therefore x = A$ of $x = B$
- **Die draaipunt**
Die **x-koördinaat** (die *simmetrie-as* waarde van x):
► Die simmetrie-as kan halfpad tussen die wortels gevind word, of deur die gemiddelde van die wortels te bepaal . . . $x = \frac{A+B}{2}$

Die **y-koördinaat** (die *minimum/maksimum y-waarde*):

- Die minimum of maksimum waarde van die grafiek word bepaal deur die 'simmetriese x-waarde' in die vergelyking te stel.

► Die standaardvorm van die vergelyking: $y = ax^2 + bx + c$

• Die y-afsnit

Die y-afsnit van 'n grafiek kom voor wanneer $x = 0$:

$$\therefore \text{Die y-afsnit: } y = a(0)^2 + b(0) + c = c$$

$\therefore$ Die punt waar die grafiek die y-as sny is $(0; c)$

• Die x-afsnit(te)

Die **x-afsnit(te)**, indien enige, kom voor wanneer $y = 0$:

Dus is $y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$. . . los dan vir x op

• Die draaipunt

Die **x-koördinaat** (die *simmetrie-as* waarde van x):

- Die simmetrie-as kan bepaal word vanaf: die formule, die wortels of deur die vierkant te voltooi

Die **y-koördinaat** (die *minimum/maksimum y-waarde*):

- Die minimum of maksimum waarde van die grafiek word bepaal deur die 'simmetrie x-waarde' in die vergelyking te stel of deur die vierkant te voltooi.

Die simmetrie-as

'n Parabool is altyd simmetries om die simmetrie-as.

- $\therefore$ Die simmetrie-as moet halfpad tussen die wortels wees, d.w.s. die gemiddelde van die wortels.

$$\text{Simmetrie-as: } x = \frac{A+B}{2}$$

. . . waar **A & B** die wortels is

Die wortels van die vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ Die x-afsnitte van die grafieke is $\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$ & $\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$

$\therefore$ Die som van die wortels:

$$A + B = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$\therefore$ Die gemiddelde van die wortels:

$$\frac{A+B}{2} = -\frac{b}{2a}$$

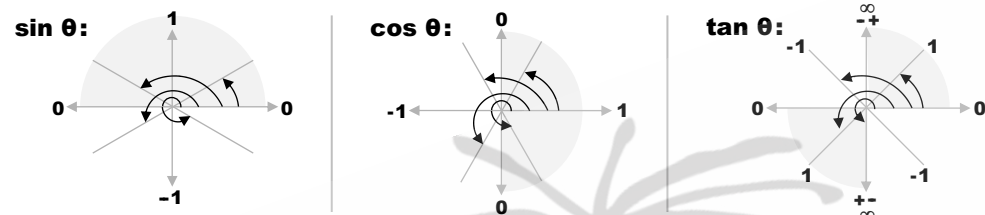
$$\text{Simmetrie-as: } x = -\frac{b}{2a}$$

Punt-vir-punt-stipping

Noodsaaklik vir die punt-vir-punt-stipping van die basiese grafieke vir $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$:

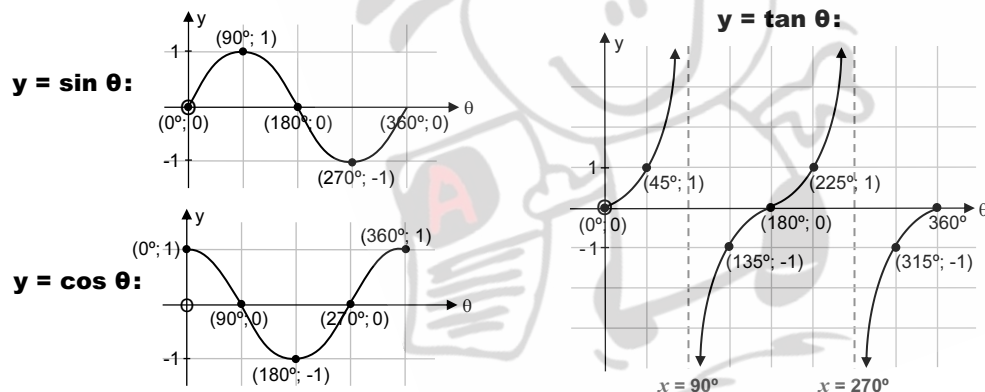
- Ken die kritieke waardes van die verhoudings
- Ken die tekens van die verhoudings in die 4 kwadrate

'Die wiele' kombineer die kritieke waardes en die tekens van die verhoudings.



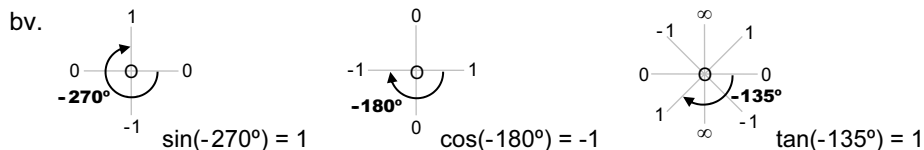
Gebruik die wiele om die 'kritieke punte' te stip voor jy die golwe teken.

- Besluit waar om te begin: Begin by die begin van die golf.
- Kies die skaal vir elke grafiek: Al die kritieke waardes is op die wiele.



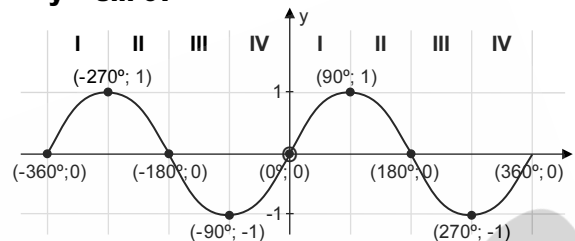
- Brei die definisieversameling uit tot: $\theta \in [-360^\circ; 360^\circ]$

Gebruik die wiele om die kritieke waardes van negatiewe hoeke neer te skryf, deur kloksgewys te beweeg:

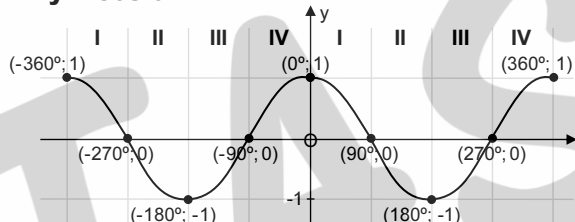


Stip punte vir al 3 basiese grafieke

► **y = sin θ :**

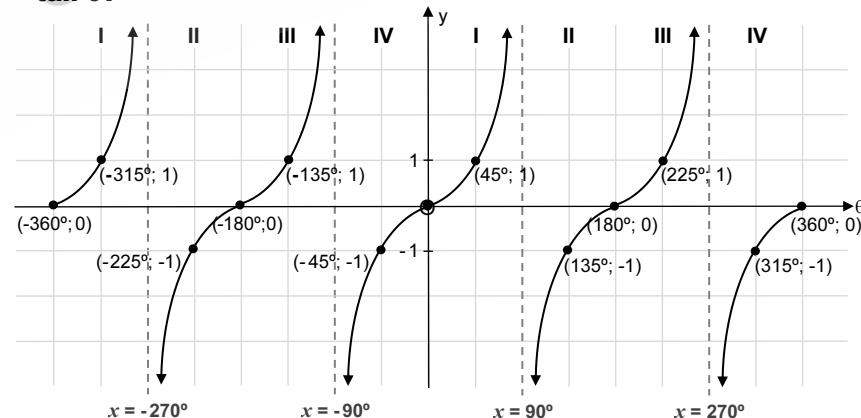


► **y = cos θ :**



LW: Die koördinate van die **draaipunte** & die koördinate van die **as-afsnitte**.

► **y = tan θ :**



- **Die waardeversameling:** $y \in \mathbb{R}$
- **Die periode** = 180°
- **Die asimptote:** $x = -270^\circ$; $x = -90^\circ$; $x = 90^\circ$; $x = 270^\circ$

Kenmerke van die grafieke:

Vir beide $y = \sin \theta$ & $y = \cos \theta$:

- **Die amplitude** = 1 eenheid
- **Die waarders:** $-1 \leq y \leq 1$
- **Die maksimum waarde** = 1
- **Die minimum waarde** = -1
- **Die periode** = 360°

Beskou elke golf asof dit in **4 kwarte** verdeel is.

Trigonometrie Onbeperk: Alle Hoeke!

Beskou alle moontlike hoeke, insluitend negatiewe hoeke

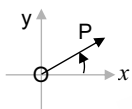
Deur die definisieversameling $[0^\circ; 360^\circ]$ te beskou, het ons al 4 kwadrante beskou, maar slegs hoeke wat antiklokgewys roteer en slegs 1 omwenteling. Rotasie antiklokgewys of klokgewys, deur enige aantal omwentelinge dek dieselfde 4 kwadrante met dieselfde resultate!

Algemene vorme: $(\theta \pm 360^\circ)$; $(-\theta)$

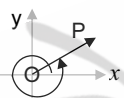
Rotasie deur omwentelinge, antiklokgewys en klokgewys

bv. (1) Vergelyk: 30° ; 390° en -330°

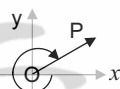
► 30°



► $390^\circ = 30^\circ + 360^\circ$



► $-330^\circ = 30^\circ - 360^\circ$



Hierdie is 3 verskillende $\angle^e$, maar hulle is 'ko-eindigend', d.w.s. hul arms val saam.

∴ Hulle het dieselfde trig verhoudings:

$$\sin 30^\circ = \sin 390^\circ = \sin(-330^\circ) = \frac{1}{2}$$

(2) Vergelyk: 330° ; 690° ; -30° ; -390°

Standaardposisies:

Hierdie hoeke is ko-eindigend.

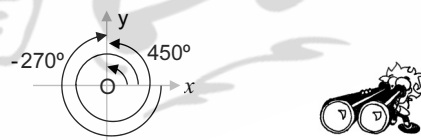
∴ Hulle het dieselfde trig verhoudings:

$$\sin 330^\circ = \sin 690^\circ = \sin(-30^\circ) = \sin(-390^\circ) = -\frac{1}{2}$$

(3) Vergelyk: 90° ; 450° ; -270°

$$450^\circ = 90^\circ + 360^\circ$$

$$-270^\circ = 90^\circ - 360^\circ$$

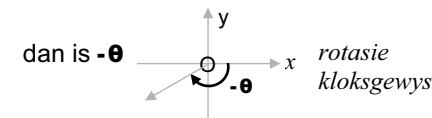
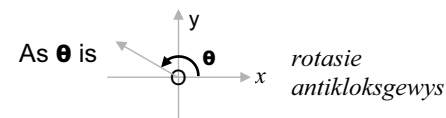


Hierdie 3 hoeke is ko-eindigend, d.w.s. hulle het dieselfde eindarm, OY. Die sinus van al 3 hoeke is 1, hul kosinus is 0 en hul tan is ongedefinieerd.

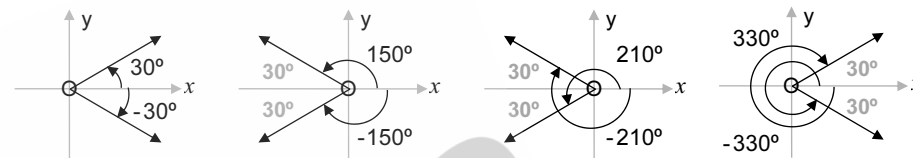
Ons lei die volgende reduksieformules vir $\theta \pm 360^\circ$ af:

$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta$	$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$	$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan \theta$
$\sin(\theta - 360^\circ) = \sin \theta$	$\cos(\theta - 360^\circ) = \cos \theta$	$\tan(\theta - 360^\circ) = \tan \theta$

Rotasie klokgewys



► Vergelyk 30° ; 150° ; 210° ; 330°
met: -30° ; -150° ; -210° ; -330°



Die reduksieformules vir $-\theta$:

Beskou θ skerp

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = +\cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

Vergelyk met:

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = +\cos \theta$$

$$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

► Die volgende pare hoeke is **ko-eindigend**.

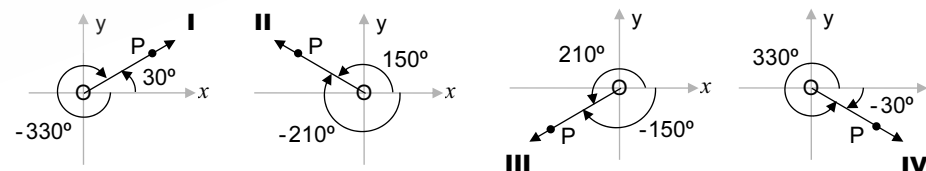
∴ Hulle het dieselfde trig verhoudings.

30° & -330°

150° & -210°

210° & -150°

330° & -30°



I: $\sin(-330^\circ)$
 $= \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{2}$

II: $\sin(-210^\circ)$
 $= \sin 150^\circ$
 $= \frac{1}{2}$

III: $\sin(-150^\circ)$
 $= \sin 210^\circ$
 $= -\frac{1}{2}$

IV: $\sin(-30^\circ)$
 $= \sin 330^\circ$
 $= -\frac{1}{2}$

Dus: $\sin(-330^\circ) = +\sin 30^\circ$

$\sin(-150^\circ) = -\sin 30^\circ$

$\sin(-210^\circ) = +\sin 30^\circ$

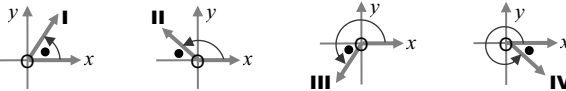
$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ$

TRIG OPSOMMING (Graad 11)

► HOEKE IN STANDAARDPOSISIES

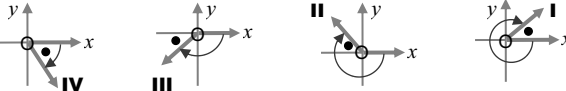
• Positiewe $\angle^e$

(antiklokgewys van 0° tot 360°):

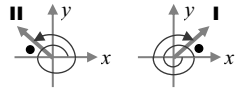


• Negatiewe $\angle^e$

(klokgewys van 0° tot -360°):



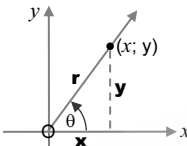
Ook moontlik:



► DIE VERHOUDINGS

& hulle

• Definities:



• Tekens:

$\sin \theta$ is positief in I & II

$\cos \theta$ is positief in I & IV

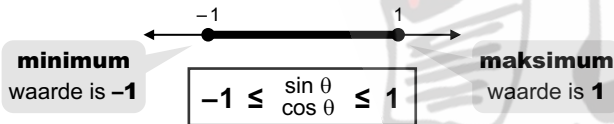
$\tan \theta$ is positief in I & III

• Kritieke waardes:

$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$

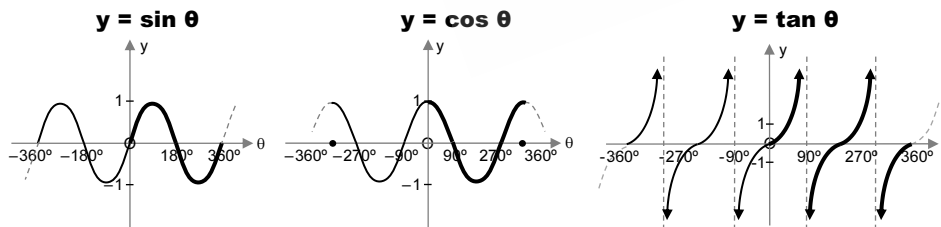
• Minimum & Maksimum waardes van $\sin \theta$ & $\cos \theta$:

Die waardes van $\sin \theta$ & $\cos \theta$ strek van -1 tot 1 .



Alle waardes is **egte breuke** of 0 of ± 1 .

• Grafieke:



► IDENTITEITE

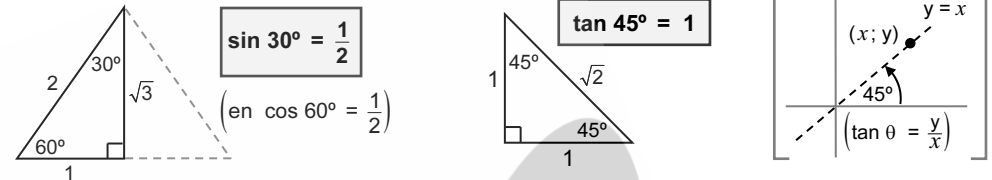
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\text{ \& } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

► SPESIALE $\angle^e$



& HUL 'FAMILIES':

30° 'familie'	60° 'familie'	45° 'familie'	
150°	120°	135°	180° -
210°	240°	225°	180° +
330°	300°	315°	360° -

► ALGEMENE VORMS

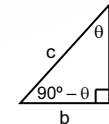
ENIGE verhouding $\left(\begin{matrix} 180^\circ \pm \theta \\ 360^\circ - \theta \\ -\theta \end{matrix} \right) = \pm$ daardie **SELFDE** verhouding van θ

► KO-VERHOUDINGS (sinus en kosinus)

• $90^\circ - \theta$ ('n skerphoek)

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

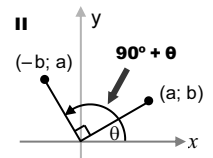
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$



• $90^\circ + \theta$ ('n stomphoek)

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$



Die verhouding **VERANDER** na die **KO**-verhouding

► OPLOSSING VAN Δ^e

In **Reghoekige** Δ^e , gebruik ons:

- Gewone trig. verhoudings
- die Stelling van Pythagoras
- Oppv. = $\frac{1}{2}bh$

In **Nie-Reghoekige** Δ^e , gebruik ons:

• Sinusreël:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

• Kosinusreël:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

• Oppervlaktereël:

$$\text{OPP.V.} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

Maar ook: Oppv. van $\Delta = \frac{1}{2}bh$

'n Noodsaaklike Konsep: Die woord, onderspan . . .

Om die woord '**onderspan**' te verstaan is kritiek in die begrip van sirkelmeetkunde. Ons sê dat 'n boog of 'n koord hoeke by die middelpunt of op die omtrek van 'n sirkel **onderspan** (alhoewel dit ook by ander punte kan gebeur).

Sentrale en Ingeskrewe hoeke

Bestudeer figure 1 tot 4 onderaan die bladsy.

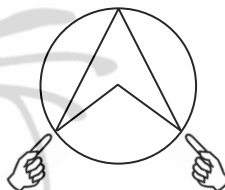
In al die figure **onderspan** boog AB ($\widehat{AB}$), of koord AB:

- 'n **middelpunts** $\angle$ **AÔB** by die **middelpunt** van die $\odot$, en
- 'n **omtreks** $\angle$ **APB** op die **omtrek** van die sirkel.

Neem in ag dat *onderspan*, *ondersteun* beteken.

Om te verseker dat jy die betekenis van die woord 'onderspan' verstaan:

- Neem **elk** van die figure:
 - Plaas jou wysvingers op A & B;
 - beweeg langs die radiusse om by O te ontmoet en terug;
 - beweeg dan om by P op die omtrek te ontmoet en terug.
- Draai jou boek onderstebo en skuins. Jy moet die verskillende aansigte van hierdie situasies kan herken.
- Let op of die hoeke skerp, stomp, reghoekig, gestrek of inspringend (refleks) is.
- Teken figure 1 tot 4 oor, laat die koord AB heeltemal uit en **beskou die boog** wat die middelpunts- en omtrekshoeke in elke geval, onderspan.



Hierdie figure stel die progressie van die volgende voor:

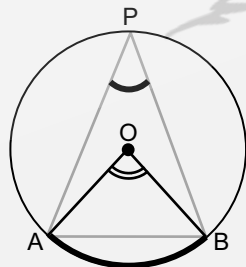
- 'n **groeïende boog AB** (van klein tot groot), en
- **die hoeke** (van skerp tot refleks) wat dit by die middelpunt en op die omtrek van die sirkel onderspan.



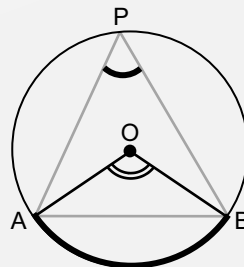
Progressie vanaf Figure 1 - 4

illustreer, soos **boog AB** groei:

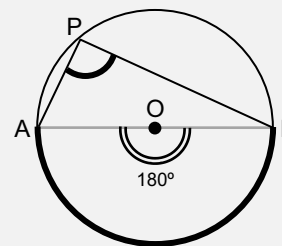
- **SENTRALE HOEKE**, hoeke wat by die **middelpunt** **onderspan** word, en
- **INGESKREWE HOEKE**, hoeke wat by die **omtrek** van 'n sirkel **onderspan** word.



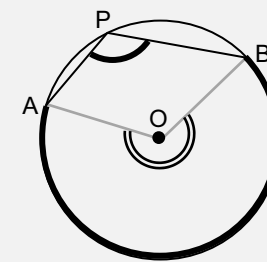
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



Onderzoek 2: middelpuntshoek, omtrekshoek

Teken 'n paar van jou eie groter sketse van figure 1 tot 4

- Wat is die reeks moontlike waardes van $\widehat{AÔB}$? En van $\widehat{APB}$?
- Meet $\widehat{AÔB}$ en $\widehat{APB}$ in elke geval:

	fig. 1	fig. 2	fig. 3	fig. 4
$\widehat{AÔB} =$				
$\widehat{APB} =$				

Is daar 'n verwantskap tussen die groottes van $\widehat{AÔB}$ en $\widehat{APB}$ in elke figuur? Wat kan jy aflei? In woorde?

Toets jou afleidings teenoor stelling 2.1 op bladsy 9.7.

- Is daar iets spesiaal omtrent $\widehat{APB}$ in **figuur 3**? Is daar iets spesiaal omtrent **koord AB** in **figuur 3**?

Wat kan jy aflei? In woorde?

Toets jou afleidings teenoor stelling 2.2 op bladsy 9.7.

Beskou die **koord AB** teenoor die **boog AB** in figure 1 tot 4.

- In figuur 1 en 2 onderspan **koord AB** $\widehat{AÔB}$ by die middelpunt, maar doen dit nie meer vir $\widehat{AÔB} \geq 180^\circ$ nie (sien figuur 3 en figuur 4). Die koord verdwyn!
- Die **boog AB** onderspan egter $\widehat{AÔB}$ en $\widehat{APB}$ ongeag van hul groottes. Wanneer dit dus by onderspanning kom, kan ons meer gereedelik op boë, as op koorde staatmaak.

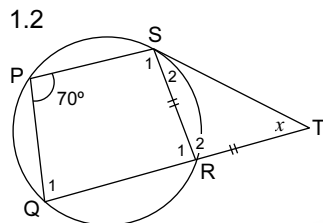
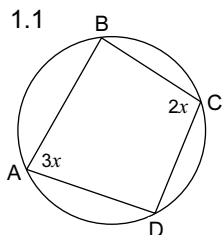
OEFENING 9.6: Gemengde Oefening

Antwoorde op bladsy A9.9

V1 tot V8: Sonder raaklyne

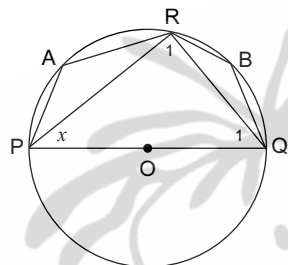


1. Bepaal, met redes, die waarde van x :



2.1 O is die middelpunt van die sirkel. $x = 40^\circ$

Bepaal, met redes, die grootte van $\hat{Q}_1$, $\hat{B}$ en $\hat{A}$.

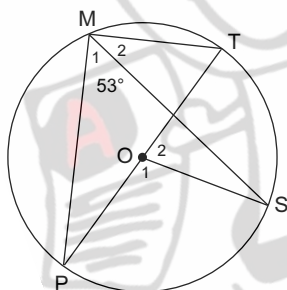


2.2 M, P, S en T is punte op 'n sirkel met middelpunt O.

PT is 'n middellyn.

MP, MT, MS en OS is verbind. $\hat{M}_1 = 53^\circ$.

Bepaal, met redes, die grootte van $\hat{O}_2$.

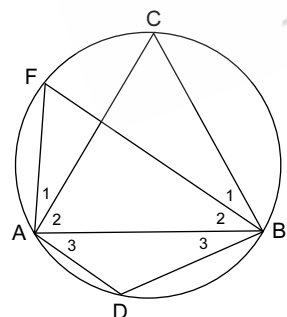


2.3 $AB = BC$ en $\hat{ABC} = 50^\circ$

Bereken, met redes, die grootte van

2.3.1 $\hat{F}$ en

2.3.2 $\hat{D}$.



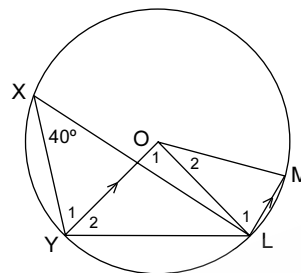
3. $OY \parallel ML$ en $\hat{X} = 40^\circ$.

Bereken, met redes, die grootte van die volgende:

3.1 $\hat{O}_1$

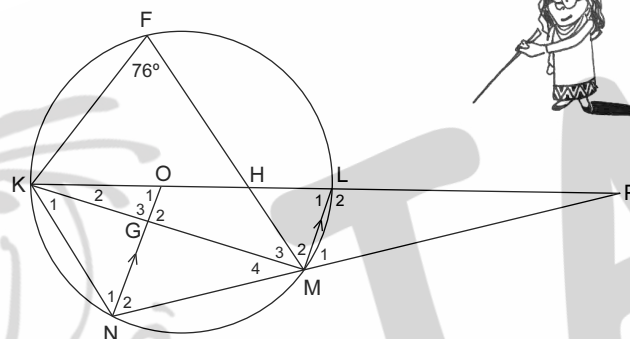
3.2 $\hat{Y}_2$

3.3 $\hat{O}_2$



4. O is die middelpunt van die sirkel en middellyn KL is verleng om NM verleng, by P te ontmoet.

$ON \parallel LM$ en $\hat{F} = 76^\circ$.



Bereken, met redes, die grootte van:

4.1 $\hat{L}_1$

4.2 $\hat{O}_1$

4.3 $\hat{M}_4$

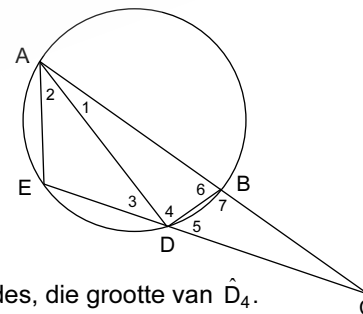
4.4 $\hat{N}_1 + \hat{N}_2$

4.5 $\hat{M}_1$

4.6 Bewys dat $KG = GM$

5. AB is 'n middellyn van die sirkel.

Die koord ED en die middellyn AB is verleng om by C te ontmoet.



5.1 Bepaal, met redes, die grootte van $\hat{D}_4$.

5.2 As $\hat{A}_1 = 22^\circ$ en $\hat{C} = 24^\circ$, bereken die grootte van $\hat{D}_5$ en lei af dat DA BÂE halveer.

6.1 Voltooi die volgende deur slegs die geskikte ontbrekende woord te skryf.

As 'n koord van 'n sirkel 'n regte hoek op die omtrek onderspan, dan is dié koord 'n

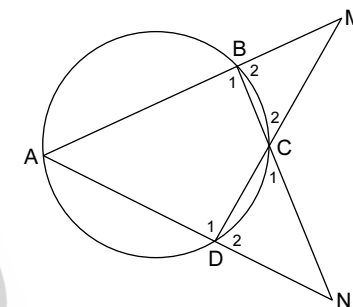
6.2 A, B, C en D is punte op die sirkel.

BC verleng en AD verleng ontmoet by N.

AB verleng en DC verleng ontmoet by M.

As $\hat{M} = \hat{N}$, bewys dat AC 'n middellyn van die sirkel is.

Wenk: Laat $\hat{M} = x$ en $\hat{C}_1 = y$



STELLINGS EN FEITE

ACT!



A: Wees **Aktief**

C: Gebruik al jou **Clues** (Wenke)

T: Pas die **T**eorie sistematies toe, herroep elke groep, en feit, een op 'n slag.

Daar is 4 groepe stellings en feite

- ▶ die **middelpunt** groep
- ▶ die **'geen middelpunt'** groep
- ▶ die **koordevierhoek** groep, &
- ▶ die **raaklyn** groep



TRIGONOMETRIE (Deel 2) – oppervlakte-, sinus- en kosinusreëls

MODULE OORSIG

In hierdie module sal ons metodes ondersoek om die volgende te bereken:

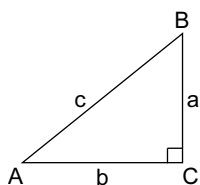
- ☐ die **oppervlakte**, en
- ☐ die **sy** en die **hoeke** van alle driehoeke:



☐ DIE OPPERVLAKTE VAN 'N DRIEHOEK

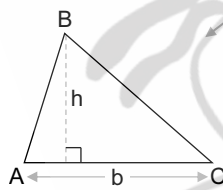
► **Opp. = $\frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$** ... Hierdie formule kan in enige Δ gebruik word

reg $\angle$ ige Δ :



$$\text{Opp.} = \frac{ba}{2}$$

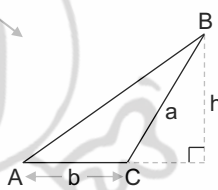
skerp $\angle$ ige Δ :



$$\text{Opp.} = \frac{bh}{2} = \frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$$

Enige 1 van die 3 sye kan as basis gebruik word. Die hoogte moet dan ooreenstem.

stomp $\angle$ ige Δ :



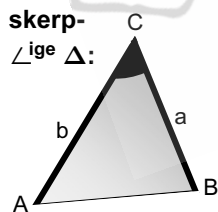
Ons sal ook 'n nuwe formule aflei en gebruik:

Die Oppervlaktereël:

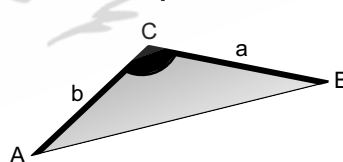
$$\text{A} = \frac{1}{2} ab \sin C$$



skerp $\angle$ ige Δ :



stomp $\angle$ ige Δ :



In woorde: Die opp. = $\frac{1}{2}$ die produk van 2 sye $\times$ die sinus van die ingsl. hoek

☐ DIE SYE EN HOEKE VAN 'N DRIEHOEK



Hersiening
van Graad 10

► REGHOEKIGE Δ^E

Ons gebruik:

die gewone trigonometriese verhoudings, $\sin \theta$, $\cos \theta$ en $\tan \theta$, en die Stelling van Pythagoras

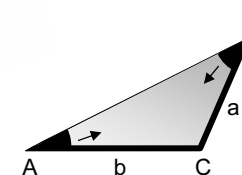
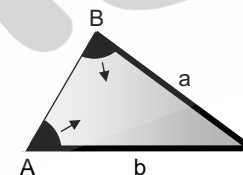
► SKERP- EN STOMP HOEKIGE Δ^E

Ons sal aflei & gebruik:

die nuwe **sinus- & kosinusformules** in die Gr 11 kurrikulum

Die Sinusreël:

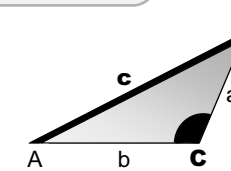
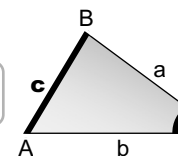
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$



In woorde: Die sinus van 'n hoek oor sy teenoorstaande sy is gelyk aan die sinus van enige ander hoek oor sy teenoorstaande sy.

Die Kosinusreël:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



In woorde: Die kwadraat van enige sy (van 'n skerp- of stomp $\angle$ ige Δ) is gelyk aan die som van die kwadraat van die ander 2 sye minus twee keer die produk van hierdie 2 sye en die cos van die ingeslote hoek.

Onafhanklike Gebeurtenisse

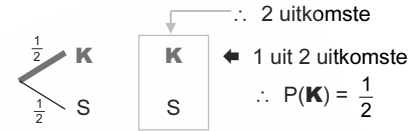
Daar word gesê dat twee gebeurtenisse A en B **onafhanklik** is as die uitkoms van die een nie die uitkoms van die ander beïnvloed nie. 'n Paar voorbeelde van onafhanklike gebeurtenisse is: opskiet van 2 of meer munte, gooi van 2 of meer dobbelstene en opskiet van 'n munt en gooi van 'n dobbelsteen. Die uitkoms van die opskiet van een munt beïnvloed nie die uitkoms van die opskiet van 'n ander munt nie. Netso, beïnvloed die gooi van een dobbelsteen nie die uitkoms van die gooi van 'n ander een nie. **Boomdiagramme** is baie nuttig om beide onafhanklike en nie onafhanklike gebeurtenisse te illustreer.

Laat K die gebeurtenis om 'n kop te kry, wees.

Ons sal beskou:

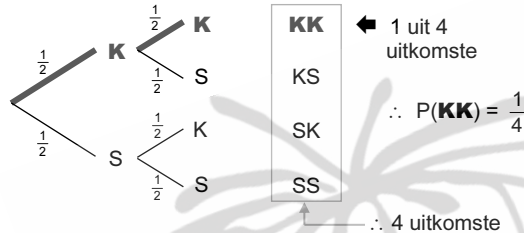
- ❶ P(K) wanneer 1 munt opgeskiet word
- ❷ P(KK) wanneer 2 munte opgeskiet word
- ❸ P(KKK) wanneer 3 munte opgeskiet word

❶ Opskiet van 'n munt



P(K)?

P(K en K)?



$\therefore$ Die waarskynlikheid om 'n kop **en** 'n kop te kry:

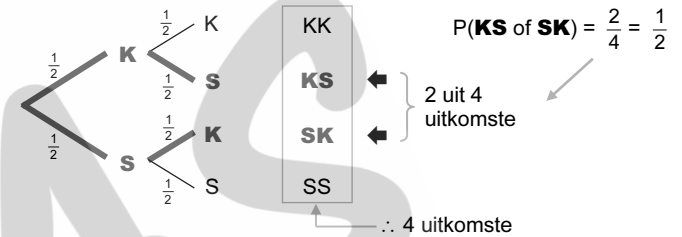
$$P(K \text{ en } K) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

... 'EN' beteken **VERMENIGVULDIG**

❷ Opskiet van 2 munte



P(KS of SK)?



$\therefore$ Die waarskynlikheid om een kop en een stert in enige volgorde te kry:

$$P(KS \text{ of } SK) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

... 'OF' beteken **PLUS**

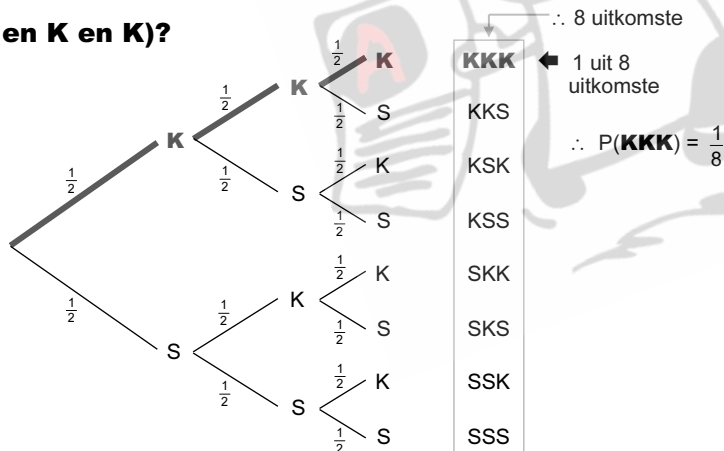
Ons sal vele uitkomstes beskou:

- ❷ KS of SK
- ❸ KSS of SKS of SSK

❸ Opskiet van 3 munte



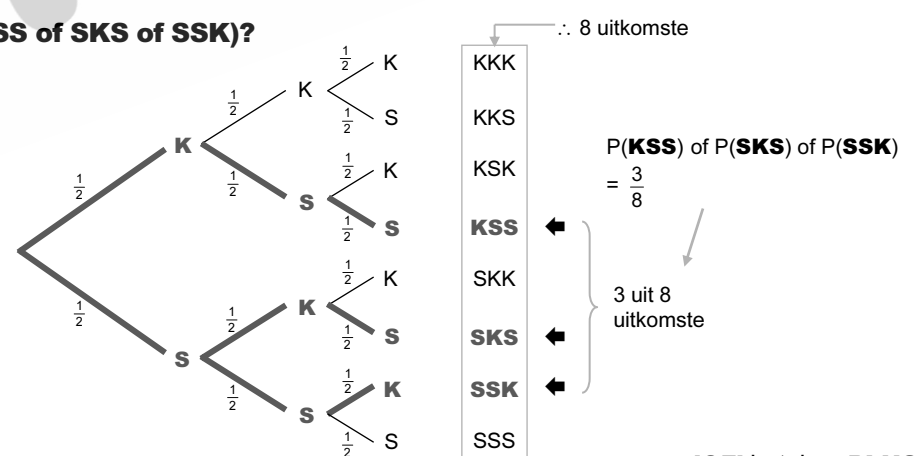
P(K en K en K)?



$\therefore$ Die waarskynlikheid om 'n kop **en** 'n stert **en** 'n kop te kry:

$$P(K \text{ en } K \text{ en } K) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \dots \text{'EN' beteken VERMENIGVULDIG}$$

P(KSS of SKS of SSK)?



$\therefore$ Die waarskynlikheid om 1 kop en 2 sterte in enige volgorde te kry:

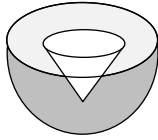
$$P(KSS \text{ of } SKS \text{ of } SSK) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

'OF' beteken **PLUS**

► METING [6]

VRAAG 8

'n Soliede metaalhemiesfeer se radius is 3 cm. Dit is van metaal A gemaak. Om sy gewig te verminder, word 'n keëlvormige gat in die hemisfeer geboor (soos in die skets getoon) en volledig met 'n ligter metaal B gevul. Die keëlvormige gat het 'n radius van 1,5 cm en 'n diepte van $\frac{8}{9}$ cm.



Bereken die verhouding van die volume van metaal A tot die volume van metaal B.

[6]

► EUKLIDIESE MEETKUNDE [40]

VRAAG 9

9.1 Voltooi die stelling sodat dit geldig is:

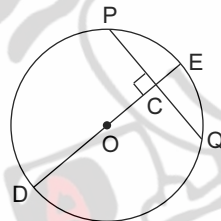
Die lyn wat van die middelpunt van 'n sirkel loodreg op 'n koord getrek word . . .

(1)

9.2 In die diagram is O die middelpunt van die sirkel.

Die middellyn DE sny die koord PQ loodreg by C.

DE = 20 cm en CE = 2 cm.



Bereken, met redes, die lengte van die volgende:

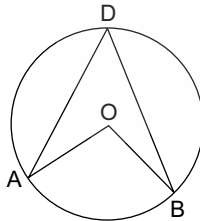
9.2.1 OC

9.2.2 PQ

(2)(4) [7]

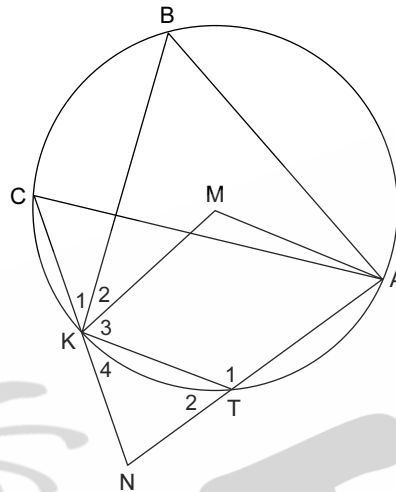
VRAAG 10

10.1 In die diagram is O die middelpunt van die sirkel en A, B en D is punte op die sirkel.



Gebruik Euklidiese meetkundemetodes om die stelling te bewys wat beweer dat $\angle AOB = 2\angle ADB$. (5)

10.2 In die diagram is M die middelpunt van die sirkel. A, B, C, K en T lê op die sirkel. AT verleng en CK verleng ontmoet in N. Verder is $NA = NC$ en $\hat{B} = 38^\circ$.



10.2.1 Bereken, met redes, die grootte van die volgende hoeke:

(a) $\hat{KMA}$

(b) $\hat{T}_2$

(2)(2)

(c) $\hat{C}$

(d) $\hat{K}_4$

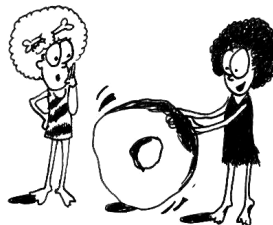
(2)(2)

10.2.2 Toon aan dat $NK = NT$.

(2)

10.2.3 Bewys dat AMKN 'n koordevierhoek is.

(3) [18]



VRAAG 11

11.1 Voltooi die volgende stelling sodat dit geldig is:

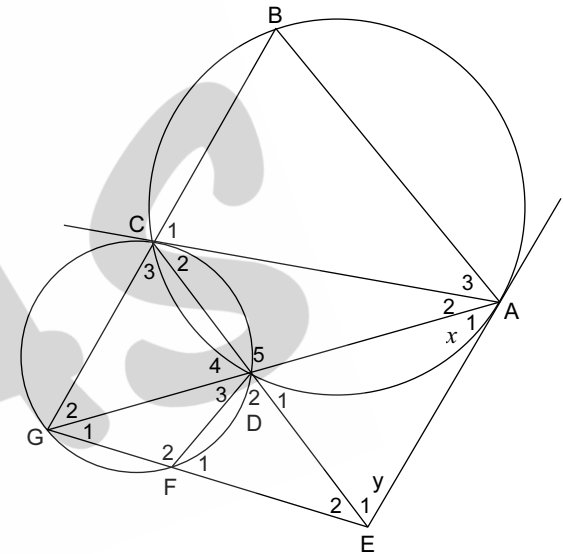
Die hoek tussen 'n koord en 'n raaklyn by die raakpunt is . . .

(1)

11.2 In die diagram is EA 'n raaklyn aan sirkel ABCD by A.

AC is 'n raaklyn aan sirkel CDFG by C.

CE en AG sny mekaar in D.



As $\hat{A}_1 = x$ en $\hat{E}_1 = y$, bewys die volgende met redes:

11.2.1 $BCG \parallel AE$

(5)

11.2.2 AE is 'n raaklyn aan sirkel FED

(5)

11.2.3 $AB = AC$

(4) [15]

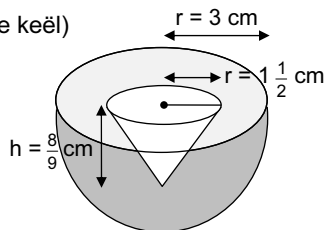
TOTAAL: 150



► METING [6]

8. Volume van metaal B (die keël)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \pi (1,5)^2 \cdot \frac{8}{9} \\ &= \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Volume van die hemisfeer} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \cdot 3^3 \\ &= 18\pi \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Volume van metaal A} = 18\pi - \frac{2}{3}\pi = 17\frac{1}{3}\pi$$

$\therefore$ Die verhouding:

$$\begin{aligned} \text{Volume van metaal A} : \text{Volume van metaal B} \\ &= 17\frac{1}{3}\pi : \frac{2}{3}\pi \\ \times 3) &= 52\pi : 2\pi \\ \div 2\pi) &= 26 : 1 \end{aligned}$$

► EUKLIDIESE MEETKUNDE [40]

9.1 ... halveer die koord <

$$9.2.1 \quad OE = OD = \frac{1}{2}(20) = 10 \text{ cm}$$

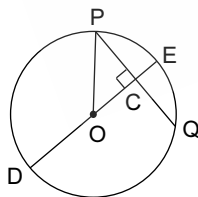
$$\therefore OC = 8 \text{ cm} \quad \dots CE = 2 \text{ cm}$$

radiusse
= $\frac{1}{2}$ middellyn

9.2.2 In $\triangle OPC$:

$$\begin{aligned} PC^2 &= OP^2 - OC^2 \quad \dots \text{Pythagoras} \\ &= 10^2 - 8^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

$$\therefore PC = 6 \text{ cm}$$



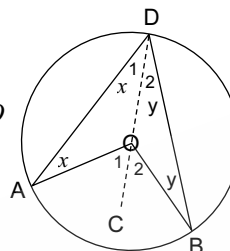
$$\therefore PQ = 12 \text{ cm} \quad \dots \text{lyn vanuit middelpnt.} \perp \text{ op koord}$$

10.1 Konstruksie: Verbind DO en verleng dit na C

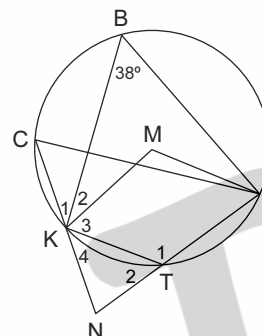
Bewys:

$$\begin{aligned} \text{Laat } \hat{D}_1 &= x \\ \text{dan is } \hat{A} &= x \quad \dots \angle^e \text{ teenoor} \\ &= \text{radiusse} \\ \therefore \hat{O}_1 &= 2x \\ &\dots \text{buite } \angle \text{ van } \triangle DAO \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Net so, } \hat{O}_2 &= 2y \\ \therefore \hat{A}OB &= 2x + 2y \\ &= 2(x + y) \\ &= 2\hat{A}DB \end{aligned}$$



10.2



$$10.2.1 \quad (a) \hat{K}MA = 2(38^\circ) \quad \dots \text{middelpunts } \angle = 2 \times \text{omtreks } \angle = 76^\circ$$

$$(b) \hat{T}_2 = 38^\circ \quad \dots \text{buite } \angle \text{ van kvh. BKTA}$$

$$(c) \hat{C} = 38^\circ \quad \dots \angle^e \text{ in dieselfde segment of, buite } \angle \text{ van kvh CKTA}$$

$$(d) \hat{N}AC = 38^\circ \quad \dots \angle^e \text{ teenoor} = \text{sye} \\ \therefore \hat{K}_4 = 38^\circ \quad \dots \text{buite } \angle \text{ van kvh CKTA}$$

$$10.2.2 \quad \text{In } \triangle NKT: \hat{K}_4 = \hat{T}_2 \quad \dots \text{beide} = 38^\circ \text{ in } 10.2.1 \\ \therefore NK = NT \quad \dots \text{sye teenoor} = \angle^e$$

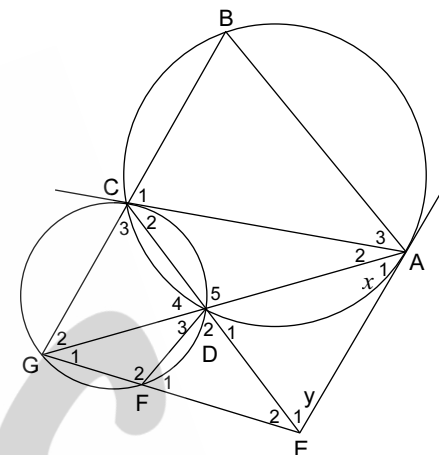
$$10.2.3 \quad \hat{K}MA = 2(38^\circ) \quad \dots \text{sien } 10.2.1(a) \\ \& \hat{N} = 180^\circ - 2(38^\circ) \quad \dots \text{som van } \angle^e \text{ van } \triangle NKT \text{ (sien } 10.2.2)$$

$$\therefore \hat{K}MA + \hat{N} = 180^\circ \\ \therefore \text{AMKN is 'n koordevierhoek}$$

$$\dots \text{teenoor } \angle^e \text{ van vierhoek supplementêr of omg. teenoor } \angle^e \text{ van kvh.}$$

11.1 ... gelyk aan die hoek onderspan deur die koord in die teenoorstaande segment. <

11.2



$$11.2.1 \quad \hat{A}_1 = x \quad \dots \text{gegee}$$

$$\therefore \hat{C}_2 = x \quad \dots \text{raaklyn-koord stelling}$$

$$\therefore \hat{G}_2 = x \quad \dots \text{raaklyn-koord stelling}$$

$$\therefore \hat{A}_1 = \hat{G}_2$$

$$\therefore BCG \parallel AE$$

$$11.2.2 \quad \hat{E}_1 = \hat{C}_3 = y \quad \dots \text{verwisselende } \angle^e; BG \parallel AE$$

$$\therefore \hat{F}_1 = y \quad \dots \text{buite } \angle \text{ van koordevierhoek}$$

$$\therefore \hat{E}_1 = \hat{F}_1$$

$$\therefore \text{AE is 'n raaklaan aan } \odot \text{FED} \quad \dots \text{omgekeerde raaklyn-koord stelling}$$

$$11.2.3 \quad \hat{C}_1 = \hat{C}AE \quad \dots \text{verwisselende } \angle^e; BCG \parallel AE \\ = \hat{B} \quad \dots \text{raaklyn-koord stelling}$$

$$\therefore \hat{C}_1 = \hat{B}$$

$$\therefore AB = AC \quad \dots \text{sye teenoor} = \angle^e$$

ANALITIESE MEETKUNDE 'TOOLKIT'

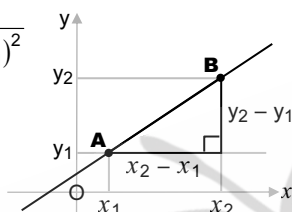
FORMULES

Beskou twee punte $A(x_1; y_1)$ en $B(x_2; y_2)$:

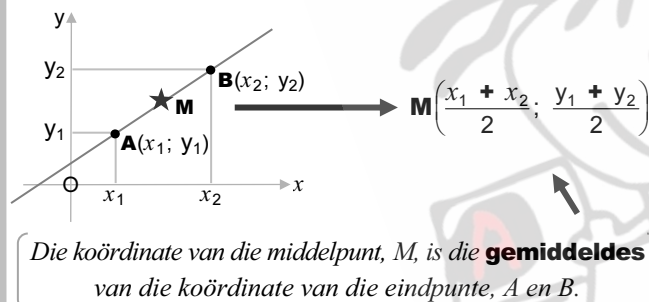
AFSTAND

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$... Stelling van Pythagoras

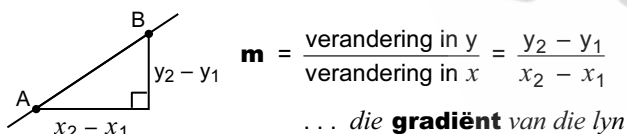
$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



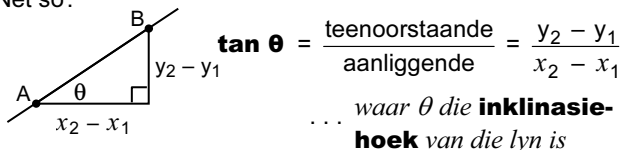
MIDDELPUNT



GRADIËNT

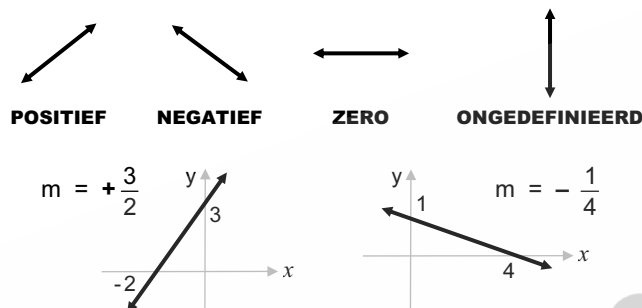


Net so:



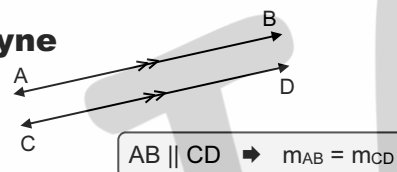
Die Gradiënt van 'n lyn

Waardes

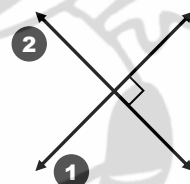


Ewewydige lyne

Ewewydige lyne het **gelyke** gradiënte.



Loodlyne



As die gradiënt van lyn ① $\frac{2}{3}$ is,
dan sal die gradiënt van lyn ② $-\frac{3}{2}$ wees.

$$\text{Let wel: } m_1 \times m_2 = \left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

d.w.s. Die **produk** van die gradiënte van $\perp$ lyne is -1 .

Kollineêre punte



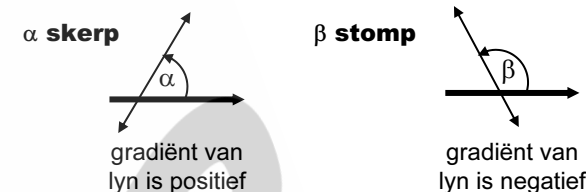
Drie punte A, B & C is kollineêr as die gradiënte van **AB & AC** gelyk is. (Let wel: Punt **A** is gemeen.)

$$m_{AB} = m_{AC} \iff A, B \text{ \& C is kollineêr}$$

Die Inklinasie van 'n lyn

Hoeke α en β hieronder is **inklinasiehoeke**.

Die inklinasie van 'n lyn is die **hoek** wat die lyn met die positiewe rigting van die x -as maak.



Gradiënt, $m = \tan \alpha$ of $\tan \beta$
waar α en β die **inklinasie** $\angle^e$ is.

REGUITLYN GRAFIEKE & hul vergelykings

Standaardvorme

▪ $y = mx + c$:

waar m = die gradiënt & c = die y -afsnit

Wanneer $m = 0$: $y = c$... 'n lyn $\parallel$ x -as

Wanneer $c = 0$: $y = mx$... 'n lyn deur die oorsprong

Net so: $x = k$... 'n lyn $\parallel$ y -as

▪ $y - y_1 = m(x - x_1)$:

waar m = die gradiënt & $(x_1; y_1)$ is 'n vaste punt.



Algemene vorm

Die **algemene vorm** is $ax + by + c = 0$,

bv. $2x + 3y + 6 = 0$



THE
ANSWER
SERIES *Your Key to Exam Success*

3-in-1

Wiskunde

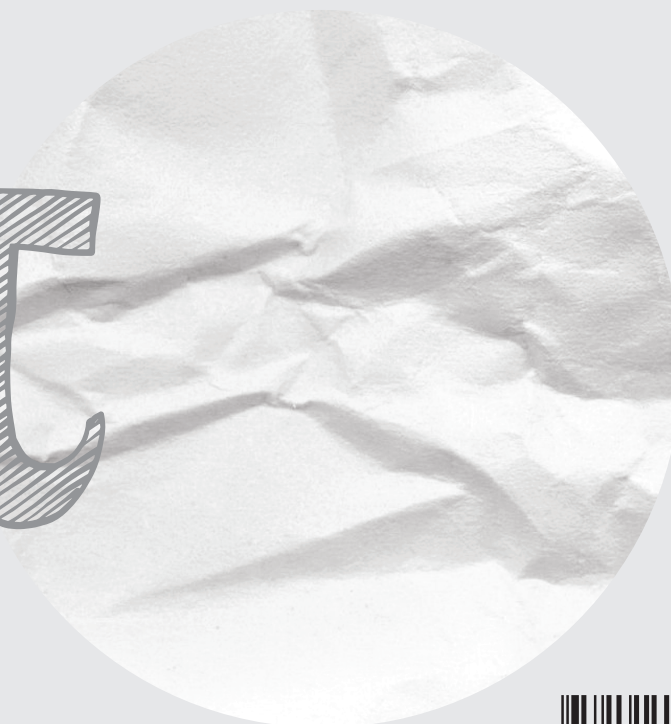
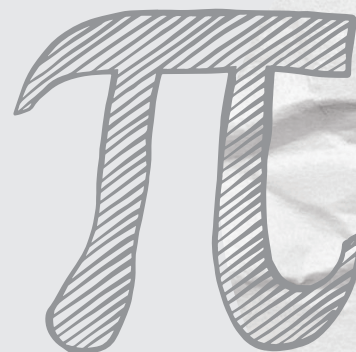
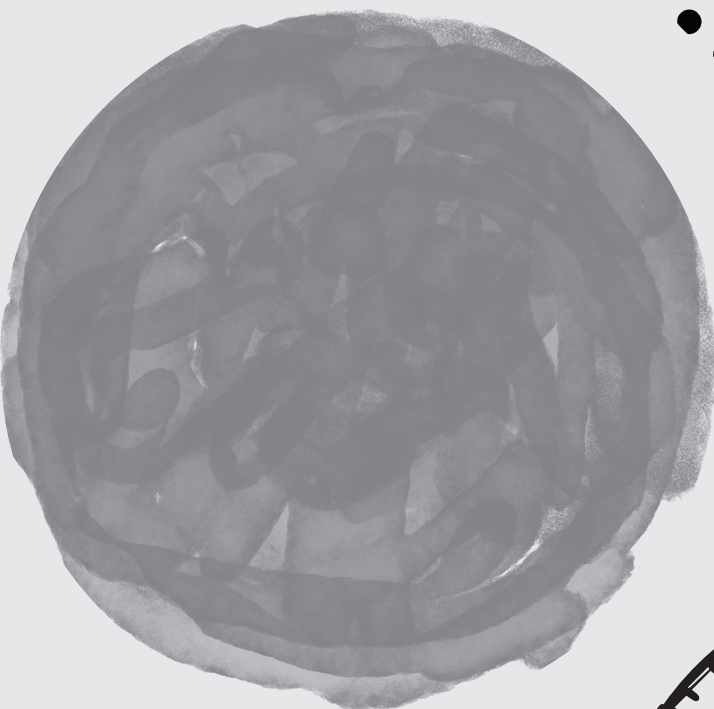
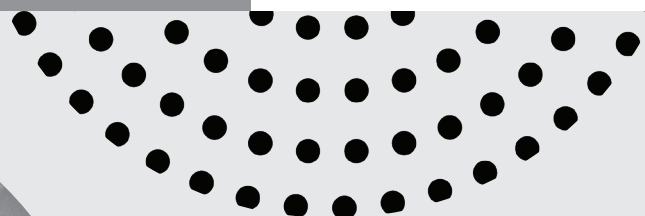
ANTWOORDE OP MODULE OEFENINGE

Anne Eadie & Gretel Lampe

GRAAD

11

KABV



9 781920 558284

INHOUD

MODULES



	Vraestel	Notas & V'e
1 Getalle & Grondbeginsels	1	A1.1
2 Eksponente & Wortelvorme	1	A2.1
3 Algebraïese uitdrukkings, vergelykings & ongelykhede	1	A3.1
4 Getalpatrone	1	A4.1
5 Analitiese Meetkunde	2	A5.1
6 Funksies & Grafieke	1	A6.1
6a: Algebraïese grafieke		
6b: Trigonometriese grafieke	2	
7 Trigonometrie (Deel 1) - Algemeen <i>Trigonometrie Opsomming</i>	2	A7.1
8 Meting	2	A8.1

	Vraestel	Notas & V'e
9 Euklidiese Meetkunde	2	A9.1
9a: Hersiening van vorige grade		
9b: Sirkelmeetkunde		
10 Trigonometrie (Deel 2)	2	A10.1
Oppv., Sinus- en Kosinusreëls		
11 Finansies, Groei & Verval	1	A11.1
12 Waarskynlikheid	1	A12.1
13 Statistiek	2	A13.1

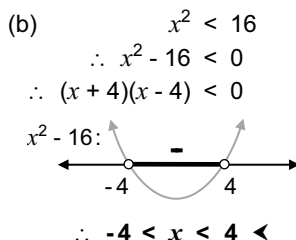
Eksamen vraestelle en -memo's is in die Studiegids.



OEFENING 3.5: Kwadratiese Ongelykhede

Vrae op bladsy 3.11

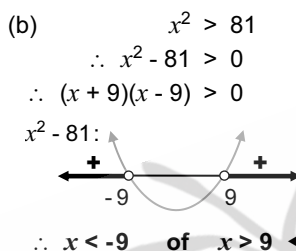
1. (a) $x^2 = 16$
 $\therefore x^2 - 16 = 0$
 $\therefore (x+4)(x-4) = 0$
 $\therefore x = -4$ of $4 <$
 (Die wortels)



(c) $x^2 \leq 16$
 $\therefore x^2 - 16 \leq 0$
 $\therefore (x+4)(x-4) \leq 0$
 Kombineer (a) & (b):

 $\therefore -4 \leq x \leq 4 <$

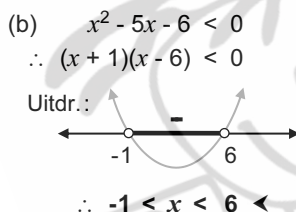
2. (a) $x^2 = 81$
 $\therefore x^2 - 81 = 0$
 $\therefore (x+9)(x-9) = 0$
 $\therefore x = -9$ of $9 <$
 (Die wortels)



(c) $x^2 \geq 81$
 $\therefore x^2 - 81 \geq 0$
 $\therefore (x+9)(x-9) \geq 0$
 Kombineer (a) & (b):

 $\therefore x \leq -9$ of $x \geq 9 <$

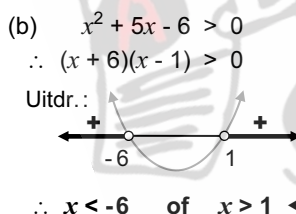
3. (a) $x^2 - 5x - 6 = 0$
 $\therefore (x+1)(x-6) = 0$
 $\therefore x = -1$ of $6 <$
 (Die wortels)



(c) $x^2 - 5x - 6 \leq 0$
 $\therefore (x+1)(x-6) \leq 0$
 Kombineer (a) & (b):

 $\therefore -1 \leq x \leq 6 <$

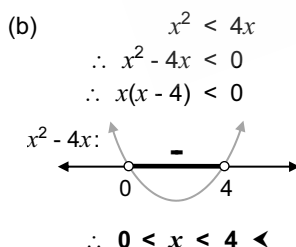
4. (a) $x^2 + 5x - 6 = 0$
 $\therefore (x+6)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -6$ of $1 <$
 (Die wortels)



(c) $x^2 + 5x - 6 \geq 0$
 $\therefore (x+6)(x-1) \geq 0$
 Kombineer (a) & (b):

 $\therefore x \leq -6$ of $x \geq 1 <$

5. (a) $x^2 = 4x$
 $\therefore x^2 - 4x = 0$
 $\therefore x(x-4) = 0$
 $\therefore x = 0$ of $4 <$
 (Die wortels)



(c) $x^2 \leq 4x$
 $\therefore x^2 - 4x \leq 0$
 $\therefore x(x-4) \leq 0$
 Kombineer (a) & (b):

 $\therefore 0 \leq x \leq 4 <$

6. $x^2 - 2x - 3 > 0$
 $\therefore (x-3)(x+1) > 0$
 Uitdr.:

 $\therefore x < -1$ of $x > 3 <$

7. $x^2 - x - 12 < 0$
 $\therefore (x-4)(x+3) < 0$
 Uitdr.:

 $\therefore -3 < x < 4 <$

8. $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$
 $\therefore (2x+1)(x-2) \leq 0$
 Uitdr.:

 $\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 2 <$

9. $3 - x < 2x^2$
 $\therefore -2x^2 - x + 3 < 0$
 $\times (-1) \therefore 2x^2 + x - 3 > 0$
 $\therefore (2x+3)(x-1) > 0$
 Uitdr.:

 $\therefore x < -\frac{3}{2}$ of $x > 1 <$

10. $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$
 $\times (-1) \therefore x^2 - 3x - 4 \geq 0$
 $\therefore (x+1)(x-4) \geq 0$
 Uitdr.:

 $\therefore x \leq -1$ of $x \geq 4 <$

11. $x^2 - 2x - 15 < 0$
 $\therefore (x+3)(x-5) < 0$
 Uitdr.:

 $\therefore -3 < x < 5 <$

12. $9x^2 - 12x + 4 > 3x$
 $\therefore 9x^2 - 15x + 4 > 0$
 $\therefore (3x-4)(3x-1) > 0$
 Uitdr.:

 $\therefore x < \frac{1}{3}$ of $x > \frac{4}{3} <$

13. $x^2 - 3x + 2 \leq 6$
 $\therefore x^2 - 3x - 4 \leq 0$
 $\therefore (x-4)(x+1) \leq 0$
 Uitdr.:

 $\therefore -1 \leq x \leq 4 <$

14. $-3(x+1)(x-2) < 0$
 $\div (-3) \therefore (x+1)(x-2) > 0$
 Uitdr.:

 $\therefore x < -1$ of $x > 2 <$

15. (a) $(x+3)(x-1) = -x+1$
 $\therefore x^2 + 2x - 3 = -x+1$
 $\therefore x^2 + 3x - 4 = 0$
 $\therefore (x+4)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -4$ of $x = 1 <$

(b) Laat $y = x^2 + 3x - 4$

 $y < 0$ as $-4 < x < 1 <$

$$1.3 \quad m_{PR} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} <$$

$$1.4 \quad \theta = 180^\circ - 26,57^\circ$$

$$\dots \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,57^\circ$$

$$= 153,43^\circ <$$

$$\text{OF: } \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ$$

$$= -26,57^\circ + 180^\circ$$

$$= 153,43^\circ$$

$$1.5 \quad y = -\frac{1}{2}x + 2 < \dots m = -\frac{1}{2} \text{ en } c = 2 \text{ in } y = mx + c$$

$$2.1 \quad PQ = \sqrt{(4+2)^2 + (9-1)^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$= 10 \text{ eenh.} < \dots = 6:8:10;$$

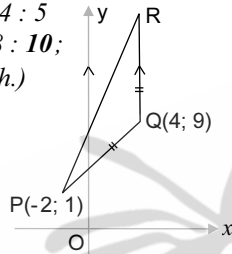
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(3:4:5
Pyth.)

$$2.2 \quad R(4; 19) <$$

$$QR = PQ = 10;$$

$$RQ \parallel y\text{-as} \Rightarrow x_R = x_Q$$



$$3.1 \quad m_{AC} = \frac{1-2}{1-(-1)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} <$$

$$3.2 \quad m_{BC} = 2 \dots m_{BC} = -\frac{1}{m_{AC}}$$

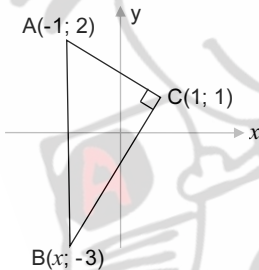
$$\therefore BC \perp AC$$

$$\therefore \frac{1-(-3)}{1-x} = 2$$

$$\therefore 4 = 2 - 2x$$

$$\therefore 2x = -2$$

$$\therefore x = -1 <$$



$$3.3 \quad AB = 2 - (-3) = 5 \text{ eenh.} < \dots x_B = x_A \Rightarrow AB = y_A - y_B$$

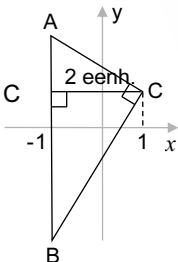
$$\dots \text{'n vertikale lengte}$$

$$3.4 \quad \text{Oppervlakte van } \triangle ABC$$

$$= \frac{1}{2} AB \times \text{hoogte vanaf C}$$

$$= \frac{1}{2} (5)(2)$$

$$= 5 \text{ eenhede}^2 <$$



Die hoogte
is 'n
horisontale
lengte
 $\therefore$ dit is
 $\parallel$ x-as.

$$4.1 \quad y = 2x + 3 \text{ het gradiënt} = 2$$

$$\& 2y - kx = 16 \Rightarrow 2y = kx + 16 \Rightarrow y = \frac{k}{2}x + 8$$

$$\therefore \text{het gradiënt} = \frac{k}{2}$$

$$\therefore \frac{k}{2} = 2 \dots \text{ewewydige lyne het gelyke gradiënte}$$

$$\therefore k = 4 <$$

$$4.2 \quad m_{PR} = m_{PQ} \dots P, Q \& R \text{ is kollineêr}$$

$$\frac{k-(-3)}{k-1} = \frac{6-(-3)}{4-1}$$

$$\therefore \frac{k+3}{k-1} = \frac{9}{3}$$

$$\therefore k+3 = 3k-3$$

$$\therefore -2k = -6$$

$$\therefore k = 3 <$$

$$5.1 \quad \frac{k+4}{2} = 3 \dots M \text{ middelpunt } BC$$

$$\therefore k+4 = 6$$

$$\therefore k = 2 <$$

$$5.2.1 \quad \text{Punt R is } \left(\frac{3+7}{2}; \frac{6+4}{2}\right)$$

$$\therefore R(5; 5)$$

$$\therefore MR = \sqrt{(5-4)^2 + (5-3)^2}$$

$$= \sqrt{1+4}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$\& BA = \sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+16}$$

$$= \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5} \dots \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \sqrt{5}$$

$$\therefore MR = \frac{1}{2} BA <$$

$$5.2.2 \quad \text{Gradiënt van } MR = \frac{5-3}{5-4} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\& \text{Gradiënt van } BA = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore MR \parallel BA < \dots m_{MR} = m_{BA}$$



$$6.1 \quad M(0; p) \text{ is die middelpunt van } AC \dots \text{'n } \parallel^m \text{ halveer mekaar}$$

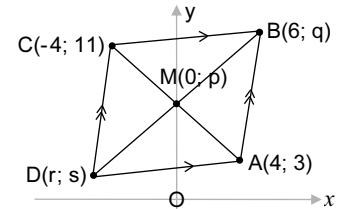
$$\therefore p = \frac{11+3}{2} = 7 <$$

$$\triangleright B(6; q) \text{ on } AB:$$

$$y = 5x - 17$$

$$\therefore q = 5(6) - 17$$

$$\therefore q = 13 <$$



$$\triangleright M(0; 7) \text{ middelpunt van } DB \text{ waar } D(r; s) \& B(6; 13)$$

$$\Rightarrow r = -6 < \& s = 1 <$$

$$6.2 \quad m_{CA} = \frac{3-11}{4-(-4)} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$\& m_{DB} = \frac{13-1}{6-(-6)} = \frac{12}{12} = 1$$

$$m_{CA} \times m_{DB} = -1$$

$$\therefore CA \perp DB <$$

$$6.3 \quad \parallel^m ABCD \text{ is 'n ruit} < \dots \text{die hoeklyne sny reghoekig.}$$

$$7.1 \quad \text{Gradiënt OF} = \tan(90^\circ + 70^\circ) = \tan 160^\circ = -0,4 <$$

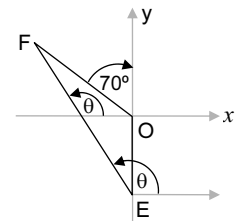
$$7.2 \quad \tan \theta = m_{EF} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \theta = 180^\circ - 56,3^\circ \dots \text{verw. } \angle = \tan^{-1} 1,5$$

$$= 56,3^\circ$$

$$\therefore \angle OEF = 123,7^\circ - 90^\circ$$

$$= 33,7^\circ <$$



$$8.1.1 \quad m_{NK} = \frac{6-(-2)}{3-(-1)} \dots m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{8}{4}$$

$$= 2 <$$

$$8.1.2 \quad m_{PK} = -\frac{1}{2} <$$

OEFENING 6.1: Parabole*Vrae op bladsy 6.13*

1.1 (a) $(-3; -5)$ (b) $y = x^2 + 6x + 4$ (c) $(0; 4)$

1.2 (a) $(1; 4)$ (b) $y = -x^2 + 2x + 3$ (c) $(0; 3)$

1.3 (a) $(-2; 1)$ (b) $y = 2x^2 + 8x + 9$ (c) $(0; 9)$

2.1 (a) $y = x^2 + 8x + 10$... *std. vorm*

$\therefore y = x^2 + 8x + 4^2 + 10 - 16$

$\therefore y = (x + 4)^2 - 6$... *dpt. vorm*

(b) 4 eenh. links en 6 eenh. af

(c) draaipunt: $(-4; -6)$

(d) y-afsnit: $(0; 10)$... *sien die std. vorm*

2.2 (a) $y = x^2 - 6x + 11$

$\therefore y = x^2 - 6x + 3^2 + 11 - 9$

$\therefore y = (x - 3)^2 + 2$

(b) 3 eenhede regs en 2 eenhede op

(c) draaipunt: $(3; 2)$

(d) y-afsnit: $(0; 11)$... *sien die standaardvorm*

2.3 (a) $y = -x^2 + 4x + 5$

$\therefore y = -(x^2 - 4x - 5)$

$\therefore y = -(x^2 - 4x + 2^2 - 5 - 4)$

$\therefore y = -[(x - 2)^2 - 9]$

$\therefore y = -(x - 2)^2 + 9$

(b) 2 eenhede regs en 9 eenhede op

(c) draaipunt: $(2; 9)$

(d) y-afsnit: $(0; 5)$... *sien die standaardvorm*

3.1 (a) $y = x^2 - 7x + 12$

$\therefore y = (x - 3)(x - 4) <$

(b) $x = 3$ en $x = 4 <$

(c) $x = 3\frac{1}{2} <$

3.2 (a) $y = -(x^2 - 7x + 12)$

$\therefore y = -(x - 3)(x - 4) <$

(b) $x = 3$ & $x = 4 <$

(c) $x = 3\frac{1}{2} <$

Die y-afsnit*Óf*

• lees dit van die standaardvorm af

óf• stel $x = 0$ in die draaipuntvorm in

3.3 (a) $y = (x - 1)^2 - 4$

$\therefore y = x^2 - 2x - 3$

$\therefore y = (x + 1)(x - 3) <$

(b) $x = -1$ en $x = 3 <$

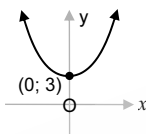
(c) $x = \frac{-1 + 3}{2} = 1 <$

4. (a) $y = (x - 3)^2 - 1 <$

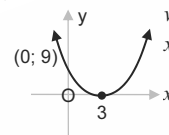
(b) $y = (x + 2)^2 + 5 <$

*Let Wel:**a = 1, gegee*

5.1 (a)

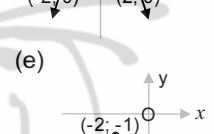


(b) x-afsn.: $x = 3$... die 'nulwaarde' van x vir $()^2 = 0$

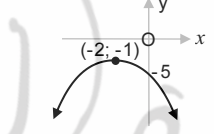


(c)

x-afsnitte:
 $-x^2 + 4 = 0$
 $x^2 = 4$
 $x = \pm 2$

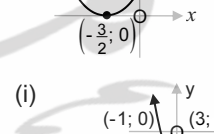


(e)

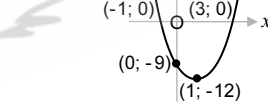


(g)

x-afsn.: $x = -\frac{3}{2}$... die 'nulwaarde' van x vir $()^2 = 0$



(i)



x-afsnitte:

$3(x - 1)^2 - 12 = 0$

$3(x - 1)^2 = 12$

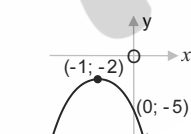
$(x - 1)^2 = 4$

$x - 1 = \pm 2$

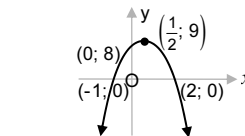
$x = 1 \pm 2$

$\therefore x = -1$ of 3

(h)



(j)



x-afsnitte:

$-(2x - 1)^2 + 9 = 0$

$(2x - 1)^2 = 9$

$2x - 1 = \pm 3$

$2x = 1 \pm 3$

$x = \frac{1 \pm 3}{2}$

$\therefore x = -1$ of 2

5.2.1 (a) 3 eenhede af

(b) 3 eenhede links

(d) 5 eenhede regs en 2 eenhede af

(f) 2 eenhede links en 4 eenhede op



5.2.2 (c) 4 eenhede af

(e) 2 eenhede regs en 1 eenheid op

6.1

(a) $\rightarrow$ (c): Gebruik $y = ax^2 + q$

Hierdie grafieke is simmetries om die y-as.

(a) $y = ax^2 + 3$

$(3; 6): 6 = a(3)^2 + 3$

$\therefore 3 = 9a$

$\therefore a = \frac{1}{3}$

$\therefore$ Vgl.: $y = \frac{1}{3}x^2 + 3 <$

(b) $y = ax^2 + 4$

$(-4; 0): 0 = a(-4)^2 + 4$

$\therefore -4 = 16a$

$\therefore a = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ Vgl.: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 <$

(c) $y = ax^2$... $c = 0$

$(-3; 4): 4 = a(-3)^2$

$\therefore 4 = 9a$

$\therefore a = \frac{4}{9}$

$\therefore$ Vgl.: $y = \frac{4}{9}x^2 <$



(d) $\rightarrow$ (f): Gebruik $y = a(x - p)^2 + q$

Hierdie grafieke is nie simmetries om die y-as nie.

(d) dpt.: $(2; 0)$

$\therefore y = a(x - 2)^2$

$(0; 2): \therefore 2 = a(-2)^2$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Vgl.: $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 <$

(e) dpt.: $(1; 2)$

$\therefore y = a(x - 1)^2 + 2$

$(0; 5): \therefore 5 = a(-1)^2 + 2$

$\therefore a = 3$

$\therefore$ Vgl.: $y = 3(x - 1)^2 + 2 <$

(f) Simmetrie $x = 2$ & Maksimum $y = 9$

$\therefore y = a(x - 2)^2 + 9$

$(-1; 0): \therefore 0 = a(-1 - 2)^2 + 9$

$\therefore 9a = -9$

$\therefore a = -1$

$\therefore$ Vgl.: $y = -(x - 2)^2 + 9 <$

$$(b) \frac{\sin \theta}{\sin \theta} - (-\sin \theta)(-\sin \theta)(1) = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \quad \blacktriangleleft$$

$$(c) \cos x + (-\cos x) + (-1)(+\tan 45^\circ) + (-\cos x)^2 = -1(+1) + \cos^2 x = -1 + \cos^2 x = -(1 - \cos^2 x) = -\sin^2 x \quad \blacktriangleleft$$

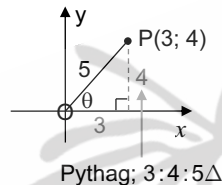
$$(d) \frac{\cos A + \cos A}{\cos A} \quad (e) \frac{\sin \theta \cdot \tan \theta \cdot \cos \theta}{(-\tan \theta) \cdot (-\sin \theta)} = \frac{2 \cos A}{\cos A} = 2 \quad \blacktriangleleft \quad = \cos \theta \quad \blacktriangleleft$$

$$4. (a) 5 \cos \theta - 3 = 0$$

$$\therefore 5 \cos \theta = 3$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{3}{5}$$

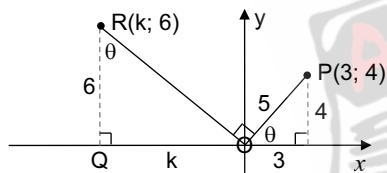
$$\therefore \sin \theta = \frac{4}{5} \quad \blacktriangleleft$$



$$(b) \text{ Die lengtes } \frac{6}{OQ} = \frac{3}{4} \dots \text{ sien die posisie van } \theta \text{ in } \triangle ROQ$$

$$OQ = 8 \text{ eenhede}$$

$$\therefore k = -8 \quad \blacktriangleleft$$



$$5. (a) \cos(90^\circ + x) \cdot \sin(360^\circ - x) + \sin^2(90^\circ - x) = (-\sin x) \cdot (-\sin x) + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \blacktriangleleft$$

$$(b) \frac{\sin(180^\circ - x) \cdot \sin(90^\circ + x)}{\cos^2(180^\circ + x)} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{(-\cos x)^2} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad \blacktriangleleft$$

OEFENING 7.4:

Alle Standaard Algemene Vorme

Vrae op bladsy 7.16

$$1. (a) -\sin 20^\circ \quad (b) -\cos 50^\circ \quad (c) \tan 70^\circ \quad (d) \cos 50^\circ$$

$$(e) \sin 40^\circ \quad (f) -\tan 80^\circ \quad (g) \cos 40^\circ \quad (h) -\sin 25^\circ$$

$$(i) -\cos 20^\circ \quad (j) -\tan 70^\circ \quad (k) -\sin 40^\circ \quad (l) \tan 80^\circ$$

$$2. (a) \frac{\sin 40^\circ \cdot \tan 45^\circ}{-\cos 50^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{\cos 50^\circ \cdot 1}{-\cos 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft$$

$$(b) \frac{\cos 60^\circ \cdot (\tan 30^\circ)^2}{(-\sin 30^\circ) \cdot (-\cos 60^\circ)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \quad \blacktriangleleft$$

$$(c) \frac{\sin 50^\circ \cdot \sqrt{3}}{* \cos 180^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \sin 40^\circ} = \frac{\sin 50^\circ \cdot \sqrt{3}}{(-1) \cdot \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} \cdot \cos 50^\circ} = -\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft$$

$$* \cos 540^\circ = \cos(360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$(d) \frac{\tan 60^\circ}{-\cos 30^\circ} - \frac{-\cos 20^\circ}{-\sin 70^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = -2 - 1 = -3 \quad \blacktriangleleft$$

$$3. (a) \frac{(-\sin x) \cdot \cos x \cdot (-\cos 60^\circ)}{\tan x}$$

$$= \frac{(-\sin x) \cdot \cos x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{1}{2} \cos^2 x}{1} = \frac{1}{2} \cos^2 x \quad \blacktriangleleft$$



$$(b) \frac{(-\cos x)(-\cos x) - 1}{(\tan^2 x)(\cos x)(\cos x)} = \frac{\cos^2 x - 1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{1}} = \frac{-(1 - \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x} = -1 \quad \blacktriangleleft$$

$$(c) (+\cos x) \cdot (-\cos x) + (-\tan x) \cdot \cos x \cdot \sin x = -\cos^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x \cdot \sin x = -(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1 \quad \blacktriangleleft$$

OEFENING 7.5: Identiteite

Vrae op bladsy 7.16

$$1. (a) \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x = \sin x \quad \blacktriangleleft$$

$$(b) \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 \quad \blacktriangleleft$$

$$(c) \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} = \sin \theta \quad \blacktriangleleft$$

$$(d) \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta \quad \blacktriangleleft$$

$$2. (a) \text{ LK} = \frac{\sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta (1)}{\cos \theta} = \tan \theta = \text{RK} \quad \blacktriangleleft$$

$$(b) \text{ LK} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{\cos^2 \theta + 1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{2 + 2 \sin \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \dots \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = \frac{2(1 + \sin \theta)}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{2}{\cos \theta} = \text{RK} \quad \blacktriangleleft$$



18.2 $\hat{P}\hat{T}R = \hat{Q}\hat{P}S + \hat{Q}$... buite $\angle$ van ΔPQT
 $= 2x$

$\therefore \hat{P}\hat{T}S = 2\hat{Q}$



18.3 $\hat{P}\hat{T}R = \hat{P}\hat{O}R$... beide $= 2x$

$\therefore P, O, T$ en R is konsies

... PR onderspan gelyke $\angle$ by T en O ,
 omgekeerde van $\angle$ in dieselfde segment

OEFENING 9.5: Raaklyne

Vrae op bladsy 9.21

1.1 $\hat{O}\hat{P}A = 90^\circ$... raaklyn $\perp$ radius
 $\therefore x = 50^\circ$ < ... som van $\angle$ in Δ

$\hat{O}\hat{P}B = 90^\circ$... raaklyn $\perp$ radius
 $\therefore y = 30^\circ$ < ... som van $\angle$ in Δ

1.2 $x = 50^\circ$ < ; $y = 70^\circ$ < ... raaklyn koord stelling

1.3 $\hat{A}\hat{B}C = \hat{A}\hat{C}B$... raaklyne vanaf 'n gemene punt A
 $= \frac{1}{2}(180^\circ - 64^\circ)$
 ... som van $\angle$ in Δ
 $= 58^\circ$

$\therefore x = 58^\circ$ <
 ... raaklyn koord stelling

$\therefore \hat{D}\hat{B}C = 180^\circ - (85^\circ + 58^\circ)$... $\angle$ op 'n reguitlyn
 $= 37^\circ$

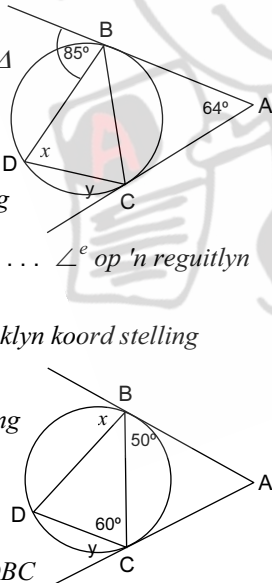
$\therefore y = 37^\circ$ < ... raaklyn koord stelling

1.4 $x = 60^\circ$ <
 ... raaklyn koord stelling

$\hat{D} = 50^\circ$
 ... rklyn koord stelling

$\therefore \hat{D}\hat{B}C = 70^\circ$... som van
 $\angle$ in ΔDBC

$\therefore y = 70^\circ$ < ... raaklyn koord stelling

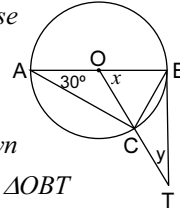


1.5 $\hat{O}\hat{C}A = 30^\circ$... $\angle$ teen. = radiusse

$\therefore x = 60^\circ$ < ... buite $\angle$ van Δ
 of midpts $\angle = 2 \times$ omtreks $\angle$

$\hat{O}\hat{B}T = 90^\circ$... radius $\perp$ raaklyn

$\therefore y = 30^\circ$ < ... som van $\angle$ in ΔOBT



1.6 $\hat{R} = \hat{S}\hat{Q}R$... $\angle$ teen. = sye

$= \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ)$... som van $\angle$ in Δ
 $= 40^\circ$

$\therefore x = 2(40^\circ)$... midpts $\angle =$
 $= 80^\circ$ < ... $2 \times$ omtreks $\angle$

$\therefore \hat{O}\hat{Q}S = \hat{O}\hat{S}Q$... $\angle$ teen. = rad.
 $= \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ)$... som van $\angle$ in Δ
 $= 50^\circ$

Maar $\hat{R}\hat{Q}S = 40^\circ$

$\therefore y = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$ <



OF:

Vir y ...

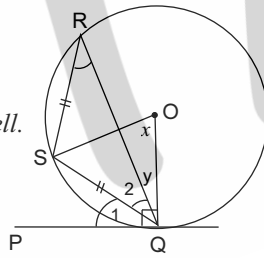
$\hat{O}\hat{Q}P = 90^\circ$... rkln $\perp$ rad

$\hat{Q}_1 = \hat{R}$... rkln koord stell.

$= \hat{Q}_2$... hierbo bewys

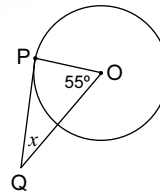
$= 40^\circ$

$\therefore y = 90^\circ - 2(40^\circ) = 10^\circ$ <



2.1 $\hat{O}\hat{P}Q = 90^\circ$... radius $\perp$ raaklyn

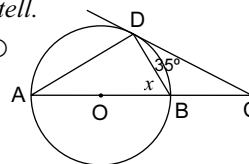
$\therefore x = 90^\circ - 55^\circ$... som van $\angle$ in Δ
 $= 35^\circ$ <



2.2 $\hat{A} = 35^\circ$... rkln koord stell.

$\hat{A}\hat{D}B = 90^\circ$... $\angle$ in semi- $\odot$

$\therefore x = 90^\circ - 35^\circ$... som van
 $\angle$ in Δ
 $= 55^\circ$ <



2.3 $\hat{O}\hat{P}Q = 90^\circ$... radius $\perp$ raaklyn

$\therefore x = 8 \text{ cm}$ < ... $3:4:5 = 6:8:10$; Stell. van Pyth.

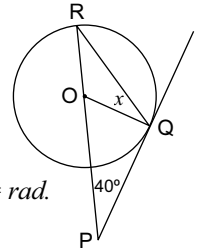
2.4 $\hat{O}\hat{Q}P = 90^\circ$... radius $\perp$ raaklyn

$\therefore \hat{P}\hat{O}Q = 50^\circ$... som van $\angle$ in Δ

Maar $\hat{P}\hat{O}Q = \hat{R} + x$... buite $\angle$ van Δ

$= 2x$... $\hat{R} = x$; $\angle$ teen. = rad.

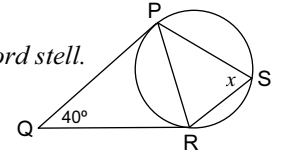
$\therefore x = 25^\circ$ <



2.5 $\hat{Q}\hat{P}R = \hat{Q}\hat{R}P$... raaklyne vanaf 'n gemene punt

$= \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ)$... som van $\angle$ in Δ
 $= 70^\circ$

$\therefore x = 70^\circ$ < ... rklyn koord stell.



2.6 $\hat{O}\hat{P}Q = \hat{O}\hat{R}Q = 90^\circ$... radiusse $\perp$ raaklyne

$\therefore PQRO$ is 'n koordevhk. ... teen. $\angle$ is suppl.

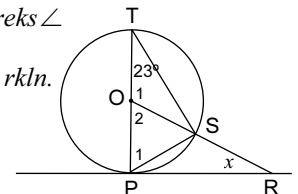
$\therefore x = 180^\circ - 50^\circ$... teen. $\angle$ van kvh.
 $= 30^\circ$ <

[OF: $x = 360^\circ - 2(90^\circ) - 150^\circ$... som van $\angle$ in kvh.
 $= 30^\circ$ <

2.7 $\hat{O}_2 = 2(23^\circ)$... midpts $\angle =$
 $= 46^\circ$

$\hat{O}\hat{P}R = 90^\circ$... midln. $\perp$ rkln.

$\therefore x = 44^\circ$ <
 ... som van $\angle$ in ΔOPR



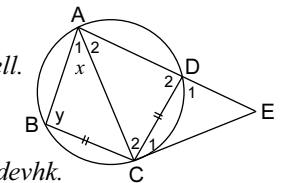
3.1 (a) $\hat{A}_2 = x$ < ... gelyke koorde; gelyke $\angle$

$\therefore \hat{C}_1 = x$ <

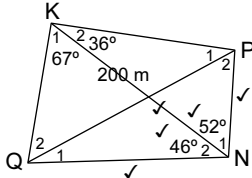
... rkln. koord stell.

(b) $\hat{D}_1 = y$ <

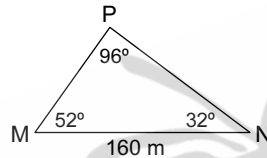
... buite $\angle$ van koordevhk.



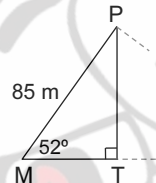
- 12.6 Die oppervlakte van vierhoek KPNQ
 = die opp. van $\triangle KPN$ + die opp. van $\triangle KQN$
 = $\frac{1}{2} PN \cdot KN \cdot \sin 52^\circ + \frac{1}{2} QN \cdot KN \cdot \sin 46^\circ$
 ... waar $QN = KN = 200 \text{ m}$ & $PN = 118 \text{ m}$
 = $9\,298,526... + 14\,386,796...$
 $\approx 23\,685,32 \text{ m}^2$ <



- 13.1 $\hat{MPN} = 180^\circ - (52^\circ + 32^\circ) \dots \angle^e \text{ som van } \triangle MPN$
 = 96° <



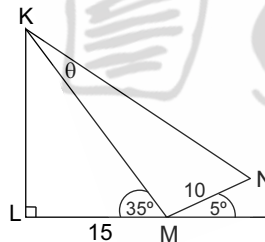
- 13.2 In $\triangle MPN$:
 $\frac{MP}{\sin 32^\circ} = \frac{160}{\sin 96^\circ}$
 $\therefore MP = \frac{160 \sin 32^\circ}{\sin 96^\circ}$
 $\approx 85 \text{ m}$ <



- 13.3 In $\triangle PMT$: $\frac{PT}{85} = \sin 52^\circ$
 $\therefore PT = 85 \sin 52^\circ$
 $\approx 67 \text{ m}$ <

- 14.1 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

- 14.2.1 In $\triangle KLM$:
 $\frac{15}{KM} = \cos 35^\circ$
 $\therefore \frac{15}{\cos 35^\circ} = KM$
 $\therefore KM \approx 18,3 \text{ m}$ <



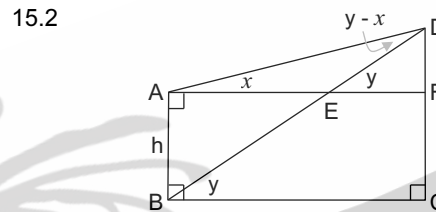
- 14.2.2 In $\triangle KMN$: $\hat{KMN} = 140^\circ \dots \angle^e \text{ som van } \triangle$
 & $KN^2 = 18,3^2 + 10^2 - 2(18,3)(10) \cos 140^\circ$
 = $715,26...$
 $\therefore KN \approx 26,7 \text{ m}$ <

- 14.2.3 In $\triangle KMN$: $\Rightarrow \frac{\sin \theta}{10} = \frac{\sin 140^\circ}{26,7}$
 $\therefore \sin \theta = \frac{10 \sin 140^\circ}{26,7}$
 = $0,2407...$
 $\therefore \theta \approx 13,9^\circ$ <

Plaas θ
BO LINKS.

Let Wel: θ is skerp $\therefore \hat{KMN}$ is alreeds stomp.

- 15.1 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ <



- 15.2.1 $\hat{DEF} = y \dots \text{ooreenkomstige } \angle^e; AF \parallel BC$
 $\therefore \hat{ADB} = y - x \dots \text{buite } \angle \text{ van } \triangle DAE$
 & $\hat{DAB} = 90^\circ + x$

- In $\triangle DAB$: $\frac{BD}{\sin(90^\circ + x)} = \frac{h}{\sin(y - x)} \dots \text{formule in 15.1}$
 $\therefore BD = \frac{h \sin(90^\circ + x)}{\sin(y - x)}$
 $\therefore BD = \frac{h \cos x}{\sin(y - x)}$ <

- 15.2.2 $BD = \frac{8 \cos 31^\circ}{\sin(61^\circ - 31^\circ)}$
 $\therefore BD = \frac{8 \cos 31^\circ}{\sin 30^\circ}$
 $\therefore BD = 13,71... \text{ m}$

- In $\triangle DBC$: $\frac{CD}{BD} = \sin y$
 $\therefore CD = BD \sin 61^\circ$
 $\therefore CD = 12 \text{ m}$ <



16. Vir Vrae 16 en 17: Maak seker dat jy die '2D Bewyse: stappe in die proses' op bladsy 10.13 lees.

- 16.1 Buite $\angle$ van $\triangle$ = som van die twee teen. binne $\angle^e$ <

- 16.2 In $\triangle MTN$: $\frac{MT}{\sin x} = \frac{k}{\sin(y - x)}$
 $\therefore MT = \frac{k \sin x}{\sin(y - x)} \dots 1$

Dit is belangrik om die benodigde sy **LINKS BO** te plaas.

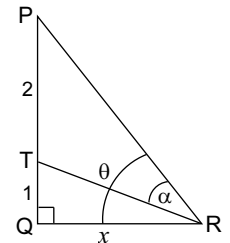


- 16.3 In reg $\angle^e \triangle MST$: $\frac{MS}{MT} = \sin y$
 $\therefore MS = MT \sin y \dots 2$
 1 in 2: $\therefore MS = \frac{k \sin x \cdot \sin y}{\sin(y - x)}$ <

LW: MT is die **SKAKEL** tussen die 2 $\triangle^e$:
 reg $\angle^e \triangle MST$ en nie-reg $\angle^e \triangle MTN$



- 17.1 In $\triangle TQR$: $\hat{TRQ} = \theta - \alpha$
 & $\frac{x}{TR} = \cos(\theta - \alpha)$
 $\therefore x = TR \cos(\theta - \alpha)$
 $\therefore TR = \frac{x}{\cos(\theta - \alpha)}$ <



- 17.2 $\hat{P} = 90^\circ - \theta \dots \angle^e \text{ som van } \triangle$

- 17.3 In $\triangle PTR$: $\frac{TR}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{2}{\sin \alpha}$
 $\therefore TR = \frac{2 \cos \theta}{\sin \alpha}$ <

- 17.4 $\therefore \frac{x}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \alpha} \dots \text{alby} = TR$
 $\therefore x = \frac{2 \cos \theta \cdot \cos(\theta - \alpha)}{\sin \alpha}$ <

- 17.5 $x = \frac{2 \cos 50^\circ \cdot \cos(50^\circ - 30^\circ)}{\sin 30^\circ} \approx 2,4 \text{ meter}$ <