

Wiskunde

KLASTEKS & STUDIEGIDS

Anne Eadie & Gretel Lampe

GRAAD

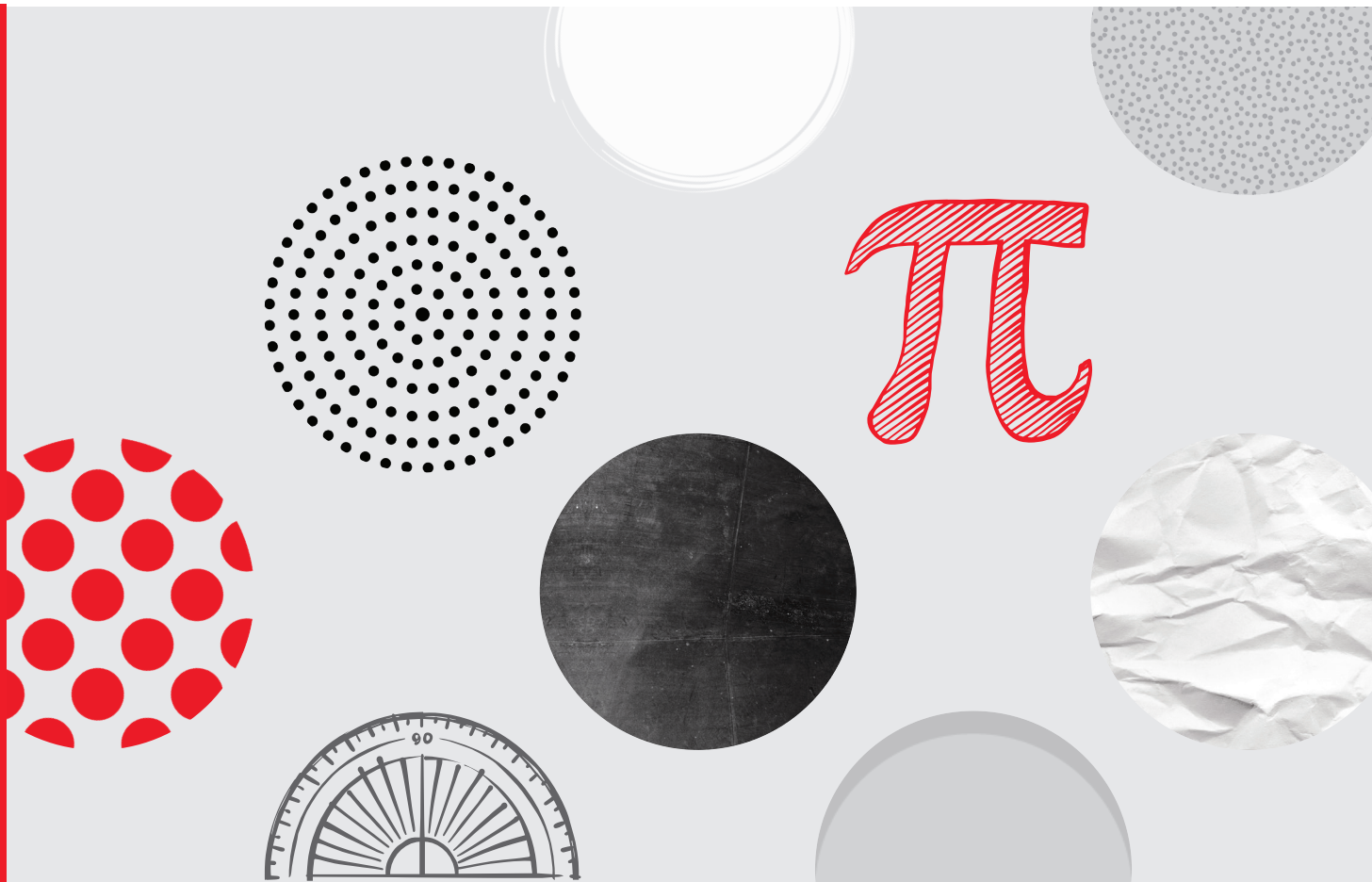
10

KABV

3-in-1



THE
ANSWER
SERIES *Your Key to Exam Success*



Graad 10 **Wiskunde** 3-in-1 KABV

KLASTEKS & STUDIEGIDS

Hierdie Graad 10 Wiskunde 3-in-1 studiegids gebruik eenvoudige, logiese stappe om die KABV-kurrikulum in diepte te verken, vanaf eerste beginsels dwarsdeur tot by finale meesterskap. Dit roer leemtes in jou geheue van vorige grade aan, voordat dit jou uitnoui om deur noukeurig uitgesoekte, gegradeerde oefeninge, nuwe werk aan te pak.

Sleutelkenmerke:

- Omvattende, verduidelikende notas en uitgewerkte voorbeelde
- Gegradeerde oefeninge om logika te bevorder en tegniek te ontwikkel vir elke onderwerp
- Gedetailleerde oplossings vir alle oefeninge
- 'n Eksamen met oplossings, ten volle verduidelik (Vraestel 1 en Vraestel 2), vir deeglike vaslegging en finale eksamenvoorbereiding

Hierdie studiegids het al bewys dat dit 'n uitstekende hulpmiddel vir Graad 10 Wiskundeleerders is. En nie net dit nie, dit bou ook selfvertroue en lê die grondslag vir sukses in Graad 11 en 12.

GRAAD

10

KABV

3-in-1

Wiskunde

Anne Eadie & Gretel Lampe

HIERDIE KLASTEKS & STUDIEGIDS SLUIT IN

- 1 Omvattende Notas
- 2 Oefeninge
- 3 Volledige Oplossings

*Plus: Eksamenvraestelle en -memo's
& Probleemoplossingsvrae en -memo's*

eBoek
beskikbaar



THE
ANSWER
SERIES *Your Key to Exam Success*

BREEDVOERIGE INHOUD

Aangepaste Onderrigplan (2023/2024)
& 'n Voorgestelde November Eksamen

1	Getalle & Getalpatrone (<i>Vraestel 1</i>)	1.1
2	Eksponente (<i>Vraestel 1</i>)	2.1
3	Algebraïese Uitdrukkings (<i>Vraestel 1</i>)	3.1
4	Algebraïese Vergelykings & Ongelykhede (<i>Vraestel 1</i>)	4.1
5	Trigonometrie (<i>Vraestel 2</i>)	5.1
	Afdeling 1: 'Pre-trig'	
	Afdeling 2: Die Trigonometrie van Skerphoeke	
	Afdeling 3: Trigonometrie Onbeperk	
6	Funksies & Grafieke (<i>Vraestel 1</i>)	6.1
7	Euklidiese Meetkunde (<i>Vraestel 2</i>)	7.1



8	Analitiese Meetkunde (<i>Vraestel 2</i>)	8.1
9	Finansies & Groei (<i>Vraestel 1</i>)	9.1
10	Statistiek (<i>Vraestel 2</i>)	10.1
11	Meting (<i>Vraestel 2</i>)	11.1
12	Waarskynlikheid (<i>Vraestel 1</i>)	12.1



Nasionale Gr 10 Modelvraestelle	Vraestelle	Memo's
Vraestel 1	E1	M1
Vraestel 2	E3	M4
Probleemoplossing	PO1	PO3
Euklidiese Meetkunde: Stellings & Aanvaarbare Redes (<i>sien agter in die boek</i>)		



WET 1 die PRODUK van MAGTE: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(dieselfde grondtalle)

Ons weet: $a^3 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a = a^{3+2} = a^5$... ons tel die eksponente op

$\therefore a^4 \times a^2 = \dots ?$ $a^x \times a^y = \dots ?$ $a^x \times a^{x^2} = \dots ?$

Antwoorde: a^6 ; a^{x+y} ; a^{x+x^2} ... nie altyd so voor die hand liggend nie!

Sien jy dat dit al meer voor die hand liggend word?
Verwys deurentyd na die wet om op die regte spoor te bly!



& die omgekeerde wet: $a^{m+n} = a^m \times a^n$

d.w.s. $2^{n+1} = 2^n \times 2^1$; selfs $2^{n-1} = 2^{n+(-1)} = 2^n \times 2^{-1}$

OEFENING 2.1 – 'n Oefening oor WET 1

(Antwoorde op bladsy 2.9)

Hierdie is **UITDRUKKINGS** wat vereenvoudig moet word.



Voltooi:

- $x^3 \times x^4 =$
- $2^p \times 2^q =$
- $x^a \times x^b =$
- $2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} =$
- $2^{-3} \times 2^{-4} =$
- $x^n \times x^n =$
- $a^{m+n} \cdot a^{m-n} =$
- $(x+y)^2 \cdot (x+y)^3 =$
- $3^{2x+4} \cdot 3^{-2x-3} =$
- $4^{x+1} \cdot 7^{x+1} \cdot 4^{3-x} =$
- $a^b \times c^d =$
- $3^{x^2} \times 3^x =$
- $\left(\frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{3}b^{\frac{-1}{2}}\right) =$
- $\sqrt[3]{2^2 \cdot 4^5} =$

Faktoriseer:

15. $2^{n+3} = \dots \times \dots$; $2^{n-5} = \dots \times \dots$ (wet 1 omgekeerd)

Vereenvoudig:

16. $\frac{5^{x+2} - 5^{x+1}}{5^{x+1}}$ 17. $\frac{3^x - 3^{x-2}}{8 \cdot 3^x}$ 18. $\frac{2 \cdot 2^{n+1} - 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}}$

Hierdie is **VERGELYKINGS** wat opgelos moet word.



Los op vir x:

19. $2^{x+1} = 2^3$ 20. $3^{2x} \cdot 3^x = 9$
21. $7^{4x} = 49$ 22. $a^x \cdot a^{x+5} \cdot a = 1$
23. $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$ 24. $5^{x+1} + 5^{x-1} = \frac{26}{25}$

$a^m = a^n$
 $\Rightarrow m = n$



LW: Daar is geen wet vir $a^m + a^n$ nie – slegs vir die **PRODUK** van magte, $a^m \times a^n$

WET 2 die KWOSIËNT van MAGTE: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(dieselfde grondtalle)

Ons weet: $2^7 \div 2^4 = \frac{2^7}{2^4} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2^3$

Dus, $\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4}$... ons trek die eksponente af!

Die onderste 4 faktore kanselleer 4 van die boonste 7 faktore.

& die omgekeerde wet: $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ d.w.s. $2^{5-a} = \frac{2^5}{2^a}$; $2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$

OEFENING 2.2 – 'n Oefening oor WET 2

(Antwoorde op bladsy 2.9)

Hierdie is **UITDRUKKINGS** wat vereenvoudig moet word.



Voltooi:

1. $a^5 \div a^2 =$ 2. $x^{\frac{1}{4}} \div x^{\frac{1}{4}} =$ 3. $p^6 \div p^2 =$ 4. $\frac{2^{3x}}{2^{2x}} =$
5. $x^{16} \div x^4 =$ 6. $\frac{7^{1-n}}{7^n} =$ 7. $a^7 \div a =$ 8. $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}} =$
9. $\frac{p^{21}}{p^{20}} =$ 10. $\frac{a^b}{c^d} =$ 11. $\frac{b}{b^{-2}} =$

Vereenvoudig:

12. $\frac{7x^{-2}y^5}{14x^{-1}y^8}$ 13. $\frac{15^{4n}}{9^{2n+1} \cdot 25^{2n}}$ 14. $\frac{a^{-3}}{a^{-5}}$

Antwoorde

OEFENING 2.1 – WET 1

(Vrae op bladsy 2.4)

1. x^7
2. 2^{p+q}
3. x^{a+b}
4. $2^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 2^1 = 2$
5. $2^{-3-4} = 2^{-7}$
6. $x^{n+n} = x^{2n}$
7. $a^{m+n+m-n} = a^{2m}$
8. $(x+y)^{2+3} = (x+y)^5$
9. $3^{(2x+4)+(-2x-3)} = 3^1 = 3$
10. $4^{x+1+3-x} \cdot 7^{x+1} = 4^4 \cdot 7^{x+1}$
11. kan nie vereenvoudig word nie
12. $3^{x^2} \times 3^x = 3^{x^2+x}$

$$13. \left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{-1}{2}}\right) = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = a^1 b^0 = a$$

$$14. \sqrt[3]{2^2 \cdot 4^5} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^{10}} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$$

$$15. 2^{n+3} = 2^n \times 2^3; \\ 2^{n-5} = 2^n \times 2^{-5}$$

$$16. \frac{5^x \cdot 5^2 - 5^x \cdot 5}{5^x \cdot 5} = \frac{5^x(25-5)}{5^x \cdot 5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$17. \frac{3^x - 3^x \cdot 3^{-2}}{8 \cdot 3^x} = \frac{3^x \left(1 - \frac{1}{9}\right)}{8 \cdot 3^x} = \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{9}$$

$$18. \frac{2 \cdot 2^n \cdot 2 - 2^n}{3 \cdot 2^n \cdot 2^{-1}} = \frac{2^n(4-1)}{2^n \cdot \frac{3}{2}} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

$$19. 2^{x+1} = 2^3 \\ \therefore x+1 = 3 \\ \therefore x = 2$$

$$20. 3^{2x} \cdot 3^x = 9 \\ \therefore 3^{2x+x} = 3^2 \\ \therefore 3^x = 2 \\ \therefore x = \frac{2}{3}$$

$$21. 7^{4x} = 49 \\ \therefore 7^{4x} = 7^2 \\ \therefore 4x = 2 \\ \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$22. a^{x+x+5+1} = 1 \\ \therefore a^{2x+6} = 1 \\ \therefore 2x+6 = 0 \\ \therefore 2x = -6 \\ \therefore x = -3$$

$$23. 2^x \cdot 2 + 2^x + 2^x \cdot 2^{-1} = 28$$

$$\therefore 2^x \left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 28$$

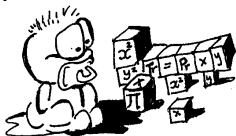
$$\therefore 2^x \left(\frac{7}{2}\right) = 28$$

$$\therefore 2^x = 28 \times \frac{2}{7}$$

$$\therefore 2^x = 8$$

$$\therefore 2^x = 2^3$$

$$\therefore x = 3$$



$$24. 5^{x+1} + 5^{x-1} = \frac{26}{25}$$

$$\therefore 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^{-1} = \frac{26}{25}$$

$$\therefore 5^x \left(5 + \frac{1}{5}\right) = \frac{26}{25}$$

$$\therefore 5^x \left(\frac{26}{5}\right) = \frac{26}{25}$$

$$\times \frac{5}{26} \quad \therefore 5^x = \frac{26}{25} \times \frac{5}{26}$$

$$\therefore 5^x = \frac{1}{5}$$

$$\therefore 5^x = 5^{-1}$$

$$\therefore x = -1$$



OEFENING 2.2 – WET 2

(Vrae op bladsy 2.4)

1. a^3
2. $x^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = x^1 = x$
3. $p^{6-2} = p^4$
4. $2^{3x-2x} = 2^x$
5. $x^{16-4} = x^{12}$
6. $7^{1-n-n} = 7^{1-2n}$
7. $a^{7-1} = a^6$
8. $a^{\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$
9. $p^{21-20} = p$
10. kan nie vereenvoudig word nie
11. $b^{1-(-2)} = b^3$
12. $\frac{7x^{-2}y^5}{2^{14}x^{-1}y^8} = \frac{1}{2xy^3}$

$$13. \frac{15^{4n}}{9^{2n+1} \cdot 25^{2n}} = \frac{(3 \cdot 5)^{4n}}{(3^2)^{2n+1} \cdot (5^2)^{2n}} = \frac{3^{4n} \cdot 5^{4n}}{3^{4n+2} \cdot 5^{4n}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$14. \frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3+5} = a^2$$

$$15. 3^{2x} = \frac{3^3}{3^{-x}} \\ \therefore 3^{2x} = 3^{3+x} \\ \therefore 2x = 3+x \\ \therefore x = 3$$

$$16. 2^{4x} = \frac{2^3}{2^{2x-2}}$$

$$\therefore 2^{4x} = 2^{3-2x+2}$$

$$\therefore 2^{4x} = 2^{5-2x}$$

$$\therefore 4x = 5-2x$$

$$\therefore 6x = 5$$

$$\therefore x = \frac{5}{6}$$

$$17. 4 \times 3^{2x} = 9 \times 2^{2x}$$

$$\div 4 \times 2^{2x} \quad \therefore \frac{3^{2x}}{2^{2x}} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\therefore 2x = 2$$

$$\therefore x = 1$$



Wet 5 omgekeerd, om met wet 2 vergelyk te word.

$$18. 3^{n-2} = \frac{3^n}{3^2}; \quad 5^3 - p = \frac{5^3}{5^p}$$

FAKTORISERING – 'N BIETJIE GOEIE RAAD

Hoeveel terme het ek?
Die aantal terme bepaal my opsies.



AANTAL TERME	OPSIES	
2 terme	Wees altyd EERS op die uitkyk vir 'n gemene faktor!	Die verskil van twee vierkante OF Die som of verskil van twee derdemagte
3 terme		Drieterm
4 terme	Groepering ... wees op die uitkyk vir omgekeerdes!	'2 - 2' – vir gemene 'hakies' of '3 - 1' of '1 - 3' – lei na verskil van vierkante
5 terme		'3 - 2' of '2 - 3' – vir gemene 'hakies'
6 terme		'3 - 3' – vir gemene 'hakies' of verskil van vierkante of '2 - 2 - 2' – vir gemene 'hakies'

En dan, twee goeie gewoontes ...

Wanneer jy gefaktoriseer het:

• **TOETS jou faktore deur uit te vermenigvuldig.**

Onthou: faktorisering $\Leftrightarrow$ vermenigvuldig uit ... **OMGEKEERDE PROSESSE!**

• **Vra vir jouself: 'Is ek klaar?'**

Maak dubbeld seker van enige vereenvoudiging of verdere faktoriserings (bv. gemene faktor of verskil van vierkante).

$$\begin{aligned} \text{bv. (1)} \quad 2x(a+b) + 4(a+b) &= (a+b)(2x+4) \\ &= 2(a+b)(x+2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (2) \quad x^4 - y^4 &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x+y)(x-y) \end{aligned}$$



Die wete dat daar riglyne is lei die verstand tot meer oortuigde denke.

VYF FAKTORISERINGSTOETSE (ongeveer 1/2 uur elk)

A

- $x^2 - x - 12$
- $8ax - 12ay - 10x + 15y$
- $(x+5)(x+3) + k(3+x)$ (2)(4)(2)
- $p^2 - 14p - 32$
- $4m - pm + 8 - 2p$
- $12x^2 - 19xy - 21y^2$ (2)(2)(2)
- $(x-y)^3 - 3(x-y)^2$
- $2a^2 - 18$
- $28ab + 4a^2 - 15b^2$ (3)(2)(2)
- $ac + yd - ad - yc$
- $3k(2m-3n) + 5t(3n-2m)$
- $(a-b)^2 - 49$ (2)(3)(2)
- $12x^3 + 11x^2 - x$
- $x^6 - 64y^6$
- $x(x-1)(x-2) - (x-1)^2$ (3)(3)(4)
- $1 - 16a^{16}$
- $-6m^2 + 11m + 10$
- $4x - ax + ay - 4y$ (4)(2)(2)
- Skryf die eenvoudigste uitdrukking (in gefaktoriseerde vorm) waarin die uitdrukkings in vrae 6, 7 & 18 kan deel, neer (d.w.s. die kleinste gemene veelvoud). (1)
- Bereken die waarde van $109^2 - 9^2$ op die kortste moontlike manier, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. (3) [50]

B

- $pa + pb + qa + qb$
- $x^2 + 5x + 6$
- $4x^2 - 9$ (2)(1)(1)
- $5at + 9 + 3a + 15t$
- $4x^2 - 20x + 25$
- $5 - 20a^2$ (3)(2)(2)
- $3ac + 2bc - 2bd - 3ad$
- $3y^2 + 15y - 108$
- $ac + 6b - 3ab - 2c$ (2)(2)(3)
- $p^3 - 8$
- $52^2 - 50^2$ (evalueer)
- $132x^2 + 96xy - 36y^2$ (2)(3)(3)
- $9x^2 - 5y - 3x - 25y^2$
- $8m^2 - 50mn + 33n^2$
- $x^4 - x^3 + x - 1$ (3)(3)(3)
- $12mb + 9a^2 - 4m^2 - 9b^2$
- $x^2 - 2xy - a^2 + y^2$
- $k^4 - 37k^2 + 36$ (3)(3)(3)
- $16(2a+b)^2 - 9(a-2b)^2$ (6) [50]

C

- $x^2 - 25xy + 144y^2$
- $x^2 - 24xy + 144y^2$
- $2ac - 3ad - 2bc + 3bd$ (2)(2)(3)
- $k(a-b) + n(b-a)$
- $122^2 - 120^2$ (evalueer)
- $2a^2 - 2a - 12$ (2)(3)(3)
- $ax - b^2 - bx + ab$
- $a^2x^2 + 5ax - 24$
- $x^2 - 2\frac{1}{4}$ (3)(2)(3)
- $20m^2n + 62mn^2 - 28n^3$
- $ax^2 + 3by^2 - 3bxy - axy$
- $125x^3 + y^3$ (3)(3)(2)
- $20x^2 - 45y^2$
- $3a^3 + 12a^2b + 9ab^2$
- $x^2 - 2x + 2y - y^2$ (3)(3)(3)
- Faktoriseer $a^2 - b^2$ en skryf dan die faktore van $(2x^2 - 4x + 1)^2 - (x^2 - 3x + 3)^2$ in die eenvoudigste vorm neer. (10) [50]

D

- $2x^2 - 8$
- $a^2 - b^2 + a - b$
- $x^2 - 12x + 36$ (3)(3)(2)
- $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2$
- $10x^2 + 38xy - 8y^2$
- $2x^3 - x^2 + 4 - 8x$ (3)(3)(3)
- $40ap^2 + 82a^2p + 40a^3$
- $12ab + 8b^2 - 6af - 4bf$
- $-3x^2 + 21x - 30$ (3)(3)(3)
- $3 - 3(x-y)^2$
- $x^2 + 8 + \frac{16}{x^2}$
- $k(x^3 - 1) - k(x - 1)^3$ (3)(2)(5)
- $4p^2(3p-1) - 5p$
- $x^2 - y^2 + 4x + 4$
- $3a^3 - 24b^3$ (4)(4)(3)
- As $P = 3x + 2$ en $Q = 2x - 1$, druk $P^2 - 2PQ + Q^2$ uit in terme van x . (3) [50]

E

1. $9a^2 - 49b^2$
2. $xy + 6x + 2y + 12$
3. $6a^2 - 5ab - 6b^2$ (2)(2)(2)
4. $18a^2 - 8b^2$
5. $-6x^3 + 5x^2 + 25x$
6. $x^4 + 24x^2y^2 + 108y^4$ (3)(3)(2)
7. $21a^2 + 26a - 15$
8. $-0,81 + c^2$
9. $4b^3 - 8b^2 - ab + 2a$ (2)(2)(4)
10. $\frac{3}{4} - 3x^2$
11. $y^3 - y^2 + y - 1$
12. $x^3 + 4x^2y + 3xy^2$ (3)(3)(3)
13. $a^2 + c^2 - b^2 - 2ac$
14. $(x^2 - 2x - 8)^2 + 5(x^2 - 2x - 8)$ (3)(4)
15. $3a^2 + 6ab + 3b^2 + 9a^2y + 18aby + 9b^2y$
16. $2,7^2 - 2,3^2$ (valueer) (5)(2)
17. Faktoriseer $x^3 + \frac{1}{x^3}$ en bepaal dan die waarde van hierdie uitdrukking as $x + \frac{1}{x} = 2$. (5) [50]

Antwoorde tot die Faktoriseringstoetse**A**

1. $(x - 4)(x + 3)$
2. $4a(2x - 3y) - 5(2x - 3y)$
 $= (2x - 3y)(4a - 5)$
3. $(x + 3)(x + 5 + k)$
4. $(p - 16)(p + 2)$
5. $m(4 - p) + 2(4 - p)$
 $= (4 - p)(m + 2)$
6. $(4x + 3y)(3x - 7y)$
7. $(x - y)^2[(x - y) - 3]$
 $= (x - y)^2(x - y - 3)$
8. $2(a^2 - 9)$
 $= 2(a + 3)(a - 3)$
9. $4a^2 + 28ab - 15b^2$
 $= (2a - b)(2a + 15b)$
10. $ac - ad - yc + yd$
 $= a(c - d) - y(c - d)$
 $= (c - d)(a - y)$
11. $3k(2m - 3n) - 5(2m - 3n)$
 $= (2m - 3n)(3k - 5)$
12. $(a - b + 7)(a - b - 7)$
13. $x(12x^2 + 11x - 1)$
 $= x(12x - 1)(x + 1)$
14. $(x^3)^2 - (8y^3)^2$... die verskil van twee vierkante
 $= (x^3 + 8y^3)(x^3 - 8y^3)$
 $= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$
OF $(x^2)^3 - (4y^2)^3$... die verskil van twee derdemagte
 $= (x^2 - 4y^2)(x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4)$
 $= (x + 2y)(x - 2y)(x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4)$
15. $(x - 1)[x(x - 2) - (x - 1)]$
 $= (x - 1)(x^2 - 2x - x + 1)$
 $= (x - 1)(x^2 - 3x + 1)$
16. $(1 + 4a^8)(1 - 4a^8)$
 $= (1 + 4a^8)(1 + 2a^4)(1 - 2a^4)$
17. $-(6m^2 - 11m - 10)$
 $= -(2m - 5)(3m + 2)$
OF $10 + 11m - 6m^2$
 $= (5 - 2m)(2 + 3m)$
18. $4x - ax - 4y + ay$
 $= x(4 - a) - y(4 - a)$
 $= (4 - a)(x - y)$
20. $109^2 - 9^2 = (109 + 9)(109 - 9)$
 $= (118)(100)$
 $= 11\ 800$
19. $(4x + 3y)(3x - 7y)(x - y)^2(x - y - 3)(4 - a)$

**B**

1. $p(a + b) + q(a + b)$
 $= (a + b)(p + q)$
2. $(x + 2)(x + 3)$
3. $(2x + 3)(2x - 3)$
4. $5a + 15 + 3a + 9$
 $= 5(a + 3) + 3(a + 3)$
 $= (a + 3)(5 + 3)$
5. $(2x - 5)^2$
6. $5(1 - 4a^2)$
 $= 5(1 + 2a)(1 - 2a)$
7. $3ac + 2bc - 3ad - 2bd$
 $= c(3a + 2b) - d(3a + 2b)$
 $= (3a + 2b)(c - d)$
8. $3(y^2 + 5y - 36)$
 $= 3(y + 9)(y - 4)$
9. $ac - 3ab - 2c + 6b$
 $= a(c - 3b) - 2(c - 3b)$
 $= (c - 3b)(a - 2)$
10. $(p - 2)(p^2 + 2p + 4)$
11. $(52 + 50)(52 - 50)$
 $= (102)(2)$
 $= 204$
12. $12(11x^2 + 8xy - 3y^2)$
 $= 12(11x - 3y)(x + y)$
13. $(9x^2 - 25y^2) - 3x - 5y$
 $= (3x + 5y)(3x - 5y) - (3x + 5y)$
 $= (3x + 5y)(3x - 5y - 1)$
14. $(4m - 3n)(2m - 11n)$
15. $x^3(x - 1) + (x - 1)$
 $= (x - 1)(x^3 + 1)$
 $= (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$
16. $9a^2 - 4m^2 + 12mb - 9b^2$
 $= 9a^2 - (4m^2 - 12mb + 9b^2)$
 $= (3a)^2 - (2m - 3b)^2$
 $= [3a + (2m - 3b)][3a - (2m - 3b)]$
 $= (3a + 2m - 3b)(3a - 2m + 3b)$
17. $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$
 $= (x - y)^2 - a^2$
 $= (x - y + a)(x - y - a)$
18. $(k^2 - 36)(k^2 - 1)$
 $= (k + 6)(k - 6)(k + 1)(k - 1)$
19. $[4(2a + b) + 3(a - 2b)][4(2a + b) - 3(a - 2b)]$
 $= (8a + 4b + 3a - 6b)(8a + 4b - 3a + 6b)$
 $= (11a - 2b)(5a + 10b)$
 $= 5(11a - 2b)(a + 2b)$
21. $(x - 16y)(x - 9y)$
22. $(x - 12y)^2$
23. $a(2c - 3d) - b(2c - 3d)$
 $= (2c - 3d)(a - b)$
24. $k(a - b) - n(a - b)$
 $= (a - b)(k - n)$
25. $(122 + 120)(122 - 120)$
 $= (242)(2) = 484$
26. $2(a^2 - a - 6)$
 $= 2(a - 3)(a + 2)$
27. $ax - bx + ab - b^2$
 $= x(a - b) + b(a - b)$
 $= (a - b)(x + b)$
28. $(ax + 8)(ax - 3)$
29. $x^2 - \frac{9}{4}$
 $= \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$
30. $2n(10m^2 + 31mn - 14n^2)$
 $= 2n(5m - 2n)(2m + 7n)$
31. $ax^2 - axy - 3bxy + 3by^2$
 $= ax(x - y) - 3by(x - y)$
 $= (x - y)(ax - 3by)$
32. $(5x + y)(25x^2 - 5xy + y^2)$

GELYKTYDIGE LINEÊRE VERGELYKINGS

Dit verwys na die oplos van probleme waar jy **TWEE** vergelykings en **TWEE** onbekendes het. Om jou te help begryp hoe om hierdie probleme op te los, kom ons begin by **EEN** vergelyking en **TWEE** onbekendes.

❑ Een Vergelyking, Twee Onbekendes – Oneindige Oplossings!

Ons het tot nou toe net met vergelykings met **EEN** onbekende gewerk

$$\text{bv. } 3x + 8 = 14$$

$$\therefore x = 2$$



Lineêre vergelykings met **EEN** onbekende het **EEN** oplossing (*meestal*)

► Beskou nou 'n lineêre vergelyking met **TWEE** onbekendes:

$$\text{bv. } x + y = 10 \quad \dots \text{'n VERBAND tussen } x \text{ en } y$$

$$\text{As } x = 1, \quad y = \dots ? \quad \text{of} \quad (1; \dots ?)$$

$$\text{As } x = 6, \quad y = \dots ? \quad \text{of} \quad (6; \dots ?)$$

$$\text{As } x = 2,96, \quad y = \dots ? \quad \text{of} \quad (2,96; \dots ?)$$

$$\text{As } x = -2, \quad y = \dots ? \quad \text{of} \quad (-2; \dots ?)$$

$\therefore$ **Moontlike oplossings:** (1; 9), (6; 4), (2,96; 7,04), (-2; 12), ens. **← A**

Hierdie is almal 'oplossings' vir hierdie vergelyking aangesien die PAAR waardes van x & y die vergelyking, in elke geval, waar maak. En ons hou net aan, d.w.s. dit lyk asof daar 'n ONEINDIGE stel antwoorde is!

'n Lineêre vergelyking met **TWEE** onbekendes het 'n **ONEINDIGE** aantal oplossings!

► Beskou nou: $x - y = 2$

Die vergelyking het ook 'n oneindige stel oplossing waarvan sommige voorbeelde is:

Moontlike oplossings: (20; 18), (12; 10), (6; 4), (-4; -6), ens. **← B**

❑ Die Betekenis van 'Gelyktydige' Vergelykings – Twee Vergelykings, Twee Onbekendes

Gelyktydig beteken **GESAMENTLIK** of **TERSELDERTYD**. Wanneer ons dus 'gelyktydige vergelykings' het, beteken dit ons moet 'n oplossing vind wat **TWEE** vergelykings **TERSELDERTYD** sal oplos.

Kom ons neem die twee vergelykings waarna ons nou net gekyk het, *gelyktydig*...

$$x + y = 10 \quad \dots (1)$$

$$x - y = 2 \quad \dots (2)$$

Ons nommer altyd die vergelykings aan die RK

Kan albei hierdie vergelykings gelyktydig waar wees?

Met ander woorde, is daar waardes van x en y wat albei vergelykings sal waar maak?

Kom ons stel die vraag vir onself, in woorde:

Kan jy aan twee getalle dink waarvan die som tien is **EN** die verskil twee is?

Wenk: Kyk na die lys van moontlike oplossings vir elke vergelyking hierbo – kyk na **A & B**

❑ Oplos van Gelyktydige Vergelykings

As ons die antwoord (6; 4) kan kry deur net na die twee vergelykings te kyk en daaroor te dink, word dit genoem: oplos van vergelykings **DEUR INSPEKSIE**.

Ons gaan nou leer hoe om die antwoorde vir gelyktydige vergelykings *algebraïes* te bepaal, sodat ons meer ingewikkelde probleme kan oplos.

Vergelykings kan opgetel of afgetrek word...

want ...	as	$a = b$
	en	$c = d$
dan is	$a + c = b + d$	of $a - c = b - d$

In Wiskunde is LOGIKA noodsaaklik!



In die voorbeeld hierbo het ons gehad: $x + y = 10 \quad \dots (1)$
en $x - y = 2 \quad \dots (2)$

Kom ons tel vergelykings (1) en (2) op om die antwoord algebraïes te bepaal...

$$(1) + (2): \quad \therefore x + y + x - y = 10 + 2$$

Ons verduidelik altyd aan die linkerkant watter bewerking ons doen.

$$\therefore 2x = 12 \quad \dots$$

$$\therefore x = 6$$

Stel $x = 6$ in (1):

$$\therefore 6 + y = 10$$

$$\therefore y = 4$$

$\therefore$ Die twee getalle is 6 en 4 **←**

Ons sê ook: (6; 4) is die OPLOSSING vir die gelyktydige lineêre vergelykings

$$x + y = 10 \quad \text{en} \quad x - y = 2$$

aangesien hierdie waardes van x & y albei vergelykings waar maak.

Soms kan ons nie 'n veranderlike *elimineer* deur bloot op te tel of af te trek nie...

Wat bedoel ons daarmee?



Uitgewerkte VoorbeeldLos op vir x en y : $2x + 3y = -1$... (1) $3x - 6y = -12$... (2)

Ons moet eers vergelyking (1) aanpas sodat een van die veranderlikes geëlimineer kan word as ons dit by vergelyking (2) tel, of dit daarvan aftrek:

(1) $\times 2$: $4x + 6y = -2$... (3) *Kyk nou na die koëffisiënt van y in (2) en (3)*

(2) + (3): $\therefore 7x = -14$... y is **geëlimineer!**
 $\therefore x = -2$

OF: Elimineer x
 – kyk hieronder

Stel $x = -2$ in (1): $\therefore -4 + 3y = -1$
 $\therefore 3y = 3$
 $\therefore y = 1$

$\therefore$ Oplossing: **(-2; 1)** <

Dit is 'n **GEORDEDE PAAR**

– eers x , dan y !

– 'n goeie manier om die oplossing van 2 vergelykings en 2 onbekendes te skryf.

TOETS HIERDIE ANTWOORD deur die waardes in vergelykings (1) en (2) in te stel om te kyk of hulle waar is!

Ons kon ook kyk of ons x kan elimineer (in plaas van y):

(1) $\times 3$: $6x + 9y = -3$... (3)

(2) $\times 2$: $6x - 12y = -24$... (4)

(3) - (4): $\therefore 21y = 21$... x is **geëlimineer**

$\therefore y = 1$

Stel $y = 1$ in (1): $2x + 3 = -1$

$\therefore 2x = -4$

$\therefore x = -2$, ens.

**Kan jy hierdie vergelykings oplos?**

$$ar^6 = 162 \quad \dots (1)$$

$$ar^2 = 2 \quad \dots (2)$$



Kom ons probeer optel ...

(1) + (2): $ar^6 + ar^2 = 162 + 2$

$$a(r^6 + r^2) = 164 \quad \text{en wat nou ? ? ?} \quad - \text{nikswerd!}$$

Jy sien optel en aftrek werk nie! Wat anders kan ons probeer?

Vergelykings kan ook vermenigvuldig of gedeel word:

want, $\text{as } a = b$
 en $c = d$

$$\text{dan is } a \cdot c = b \cdot d \quad \text{en} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Watter een van hierdie is die beste om in ons voorbeeld te gebruik om een van die veranderlikes te elimineer?

**Antwoord**

(1) $\div$ (2): $\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{162}{2}$... Dit lyk asof deling die manier is om a te **elimineer**

$$\therefore r^4 = 81$$

$$\therefore r = \pm 3$$

Stel $r = \pm 3$ in (2): $a \times 9 = 2$

$$\therefore a = \frac{2}{9} <$$

Al lyk (en is!) hierdie som anders, bly die **LOGIKA** dieselfde!

**OEFENING 4.6**

Onthou:

Dit is moontlik om jou antwoorde te toets!



Los die volgende pare gelyktydige vergelykings op:

1. $x + y = 12$
 $x - y = 4$

Doen hierdie een eers deur inspeksie en dan algebraïes.

2. $a + 7b = 49$
 $a + 3b = 9$

3. $p + 2q = 1$
 $3p - q = 10$

4. $2x + 3y = 8$
 $3x + 4y = 11$

5. $2x = 3y - 4$
 $y = 3 - x$

6. $\frac{y}{2} + 1 = \frac{x}{5}$

7. $\frac{x+y}{2} = 7 - \frac{2x-y}{3}$... ①

en $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}y$

en $\frac{x-y}{4} - \frac{x+y}{3} + 4\frac{1}{2} = 0$... ②

8. Die lengte van 'n reghoek is a mm en die breedte is b mm. Die oppervlakte van die reghoek bly onveranderd as die lengte met 6 mm vermeerder word en die breedte met 2 mm verminder word. Die oppervlakte bly ook onveranderd as die lengte met 6 mm verminder word en die breedte met 3 mm vermeerder word. Bepaal die lengte en breedte van die oorspronklike reghoek.

Antwoorde

1. 'Deur inspeksie': Die som van 2 getalle is 12 en hulle verskil is 4.
Wat is die twee getalle?



Algebraïes:

$$x + y = 12 \quad \dots (1)$$

$$x - y = 4 \quad \dots (2)$$

$$(1) + (2): \quad 2x = 16$$

$$\therefore x = 8$$

$$(1): \quad 8 + y = 12$$

$$\therefore y = 4$$

$\therefore$ Oplossing: (8; 4)

Het jy hierdie deur inspeksie gekry?

$$3. \quad p + 2q = 1 \quad \dots (1)$$

$$3p - q = 10 \quad \dots (2)$$

$$(2) \times 2: \quad 6p - 2q = 20 \quad \dots (3)$$

$$(1) + (3): \quad 7p = 21$$

$$\therefore p = 3$$

$$(2): \quad 9 - q = 10$$

$$q = -1$$

$\therefore$ Oplossing: (3; -1)

$$4. \quad 2x + 3y = 8 \quad \dots (1)$$

$$3x + 4y = 11 \quad \dots (2)$$

$$(1) \times 3: \quad 6x + 9y = 24 \quad \dots (3)$$

$$(2) \times 2: \quad 6x + 8y = 22 \quad \dots (4)$$

$$(3) - (4): \quad \therefore y = 2$$

$$(3): \quad \therefore 6x + 18 = 24$$

$$\therefore 6x = 6$$

$$\therefore x = 1$$

$\therefore$ Oplossing: (1; 2)

$$5. \quad 2x = 3y - 4 \quad \dots (1)$$

$$y = 3 - x \quad \dots (2)$$

$$(2) \text{ in } (1): \quad 2x = 3(3 - x) - 4$$

$$\therefore 2x = 9 - 3x - 4$$

$$\therefore 2x + 3x = 9 - 4$$

$$\therefore 5x = 5$$

$$\therefore x = 1$$

$$(2): \quad y = 3 - 1$$

$$\therefore y = 2$$

$\therefore$ Oplossing: (1; 2)

$$6. \quad \frac{y}{2} + 1 = \frac{x}{5}$$

$$\times 10) \quad 5y + 10 = 2x$$

$$\therefore 5y - 2x = -10$$

$$\times (-1): \quad 2x - 5y = 10 \quad \dots (1)$$

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y}{3}$$

$$\times 12) \quad 3x + 6 = 4y$$

$$\therefore 3x - 4y = -6 \quad \dots (2)$$



$$(1) \times 3: \quad 6x - 15y = 30 \quad \dots (3)$$

$$(2) \times 2: \quad 6x - 8y = -12 \quad \dots (4)$$

$$(3) - (4): \quad \therefore -7y = 42$$

$$\div (-7): \quad \therefore y = -6$$

$$\text{Vanaf } (1): \quad 2x = 5y + 10$$

$$= 5(-6) + 10$$

$$= -30 + 10$$

$$= -20$$

$$\therefore x = -10 \text{ en } y = -6$$

$\therefore$ Oplossing: (-10; -6)

$$7. (1) \times 6: \quad 3(x + y) = 42 - 2(2x - y)$$

$$\therefore 3x + 3y = 42 - 4x + 2y$$

$$\therefore 7x + y = 42 \quad \dots (3)$$

$$(2) \times 12: \quad 3(x - y) - 4(x + y) + 54 = 0$$

$$\therefore 3x - 3y - 4x - 4y + 54 = 0$$

$$\therefore -x - 7y = -54$$

$$\times (-1): \quad \therefore x + 7y = 54 \quad \dots (4)$$

$$(3) \times 7: \quad \therefore 49x + 7y = 294 \quad \dots (5)$$

$$(4) - (5): \quad \therefore -48x = -240$$

$$\therefore x = 5$$

$$(3): \quad \therefore y = 42 - 7x$$

$$= 42 - 35$$

$$\therefore y = 7$$

$\therefore$ Oplossing: (5; 7)



$$8. \quad (a + 6)(b - 2) = ab \quad \text{en}$$

$$\therefore ab - 2a + 6b - 12 = ab$$

$$\therefore -2a + 6b = 12$$

$$\div 2) \quad \therefore -a + 3b = 6 \quad \dots (1)$$

$$(a - 6)(b + 3) = ab$$

$$\therefore ab + 3a - 6b - 18 = ab$$

$$\therefore 3a - 6b = 18$$

$$\div 3) \quad \therefore a - 2b = 6 \quad \dots (2)$$

$$(1) + (2): \quad b = 12$$

$$\text{Vanaf } (2): \quad a = 2(b) + 6$$

$$= 2(12) + 6$$

$$= 24 + 6$$

$$= 30$$

$$\therefore \text{lengte} = 30 \text{ mm en breedte} = 12 \text{ mm}$$

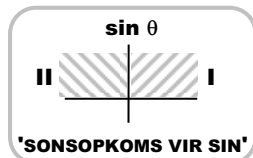
$\therefore$ Oplossing: (30; 12)



Die TEKENS van die trig verhoudings IN 'N KITS!

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \leftarrow \text{en } y \text{ is positief in I en II}$$

$\therefore \sin \theta$ is **POSITIEF** in kwadrante 1 & 2
(en negatief in 3 & 4)



$$\cos \theta = \frac{x}{r} \leftarrow \text{en } x \text{ is positief in I en IV}$$

$\therefore \cos \theta$ is **POSITIEF** in kwadrante 1 & 4
(en negatief in 2 & 3)



$$\tan \theta = \frac{y}{x} \leftarrow$$

en x & y het dieselfde teken in I en III

$\therefore \tan \theta$ is **POSITIEF** in kwadrante 1 & 3
(en negatief in 2 & 4)

$\tan \theta$



Blykbaar is dit **DIE BMW-WAPEN!!!**

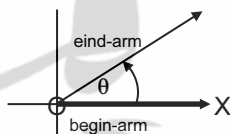


Leer hierdie maklike PRENTJIES sodat jy die TEKENS van jou trig verhoudings IN 'N KITS ken!

REËLS (bv. CAST) IS ONNODIG!!!

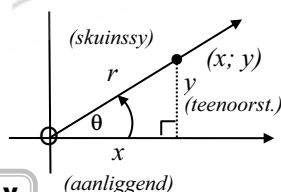
4 Stappe om enige hoek se trig verhoudings te bepaal:

1. Plaas die $\angle$ in **STANDAARDPOSISIE** (begin by $\vec{OX}$) ...



2. Kies 'n punt $(x; y)$ op die eind-arm van die $\angle$
– ons sal sy afstand vanaf die oorsprong, r , noem

3. Skryf neer $x =$ $y =$ $r =$



4. Pas die DEFINISIES toe

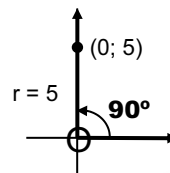
$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

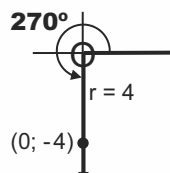
Die trig verhoudings van 90° en veelvoude van 90°

Gebruik hierdie metode om die trig verhoudings van 90° ; 180° ; 270° & 360° (& 0°) te bepaal.



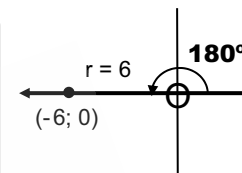
$$\begin{aligned}\sin 90^\circ &= \frac{y}{r} = \frac{5}{5} = 1 \\ \cos 90^\circ &= \frac{x}{r} = \frac{0}{5} = 0 \\ \tan 90^\circ &= \frac{y}{x} = \frac{5}{0} = \infty\end{aligned}$$

$$x = 0; y = 5; r = 5$$



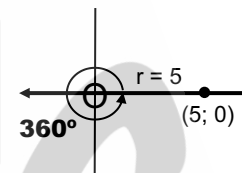
$$\begin{aligned}\sin 270^\circ &= \frac{y}{r} = \frac{-4}{4} = -1 \\ \cos 270^\circ &= \frac{x}{r} = \frac{0}{4} = 0 \\ \tan 270^\circ &= \frac{y}{x} = \frac{-4}{0} = \infty\end{aligned}$$

$$x = 0; y = -4; r = 4$$



$$\begin{aligned}\sin 180^\circ &= \frac{y}{r} = \frac{0}{6} = 0 \\ \cos 180^\circ &= \frac{x}{r} = \frac{-6}{6} = -1 \\ \tan 180^\circ &= \frac{y}{x} = \frac{0}{-6} = 0\end{aligned}$$

$$x = -6; y = 0; r = 6$$



$$\begin{aligned}\sin 360^\circ &= \frac{y}{r} = \frac{0}{5} = 0 \\ \cos 360^\circ &= \frac{x}{r} = \frac{5}{5} = 1 \\ \tan 360^\circ &= \frac{y}{x} = \frac{0}{5} = 0\end{aligned}$$

$$x = 5; y = 0; r = 5$$

Let Wel: Die antwoorde vir 0° en 360° is dieselfde.



OPSOMMING

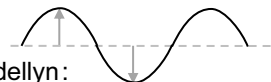
θ :	0°	$\longrightarrow$	90°	$\longrightarrow$	180°	$\longrightarrow$	270°	$\longrightarrow$	360°
$\sin \theta$:	0	---	1	---	0	---	-1	---	0
$\cos \theta$:	1	---	0	---	-1	---	0	---	1
$\tan \theta$:	0	---	$\pm \infty$	---	0	---	$\pm \infty$	---	0

Trigonometriese grafieke

Ons sal leer hoe om die grafieke $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ en $y = \tan \theta$ vir $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ te trek. Om dit maklik te maak, sal ons die kritieke waardes van hierdie verhoudings gebruik. Maar eers, 'n bietjie terminologie ...

Terminologie

Die sinus- en kosinusgrafieke is in die vorm van 'n GOLF.

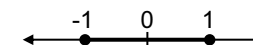


- Die **amplitude** van 'n GOLF is die afwyking vanaf sy middellyn
- Die **periode** van 'n grafiek is die aantal grade wat 'n VOLLE GOLF in beslag neem.
- Die **waardeversameling** is die versameling van alle moontlike y -waardes.

Ons ondersoek van die trig verhoudings het vir ons gewys dat die waardeversameling van sinus- en kosinuswaardes baie klein is - slegs tussen **-1** en **1**.

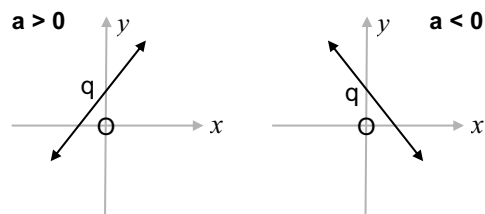
Ons skryf: **$-1 \leq \sin \theta \leq 1$** en **$-1 \leq \cos \theta \leq 1$** vir alle waardes van θ !

In teenstelling hiermee is die waardeversameling van tan-waardes vanaf $-\infty$ tot $+\infty$!



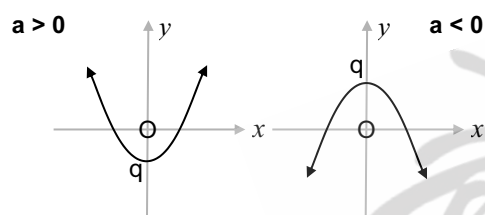
'n Opsomming van Algebraïese Funksies

Reguitlyne: $y = ax + q$



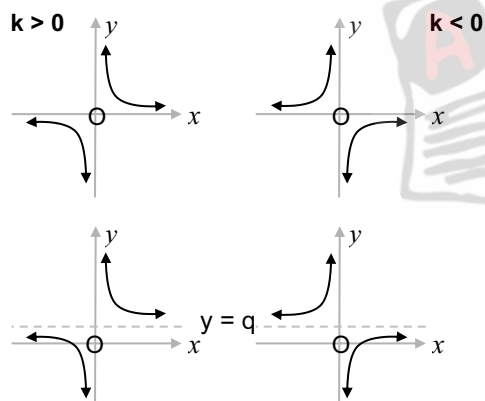
- x -afsnit ($y = 0$) & y -afsnit ($x = 0$)
 - Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$
 - Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}$
- (Geen simmetrie-asse; geen asimptote)

Parabole: $y = ax^2 + q$



- x -afsnit(te) ($y = 0$) & y -afsnit ($x = 0$)
 - Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$
 - Waardeversameling: $y \geq q$ as $a > 0$
 $y \leq q$ as $a < 0$
 - Simmetrie-as: $x = 0$ (die y -as)
- (Geen asimptote)

Hiperbole: $y = \frac{k}{x} + q$

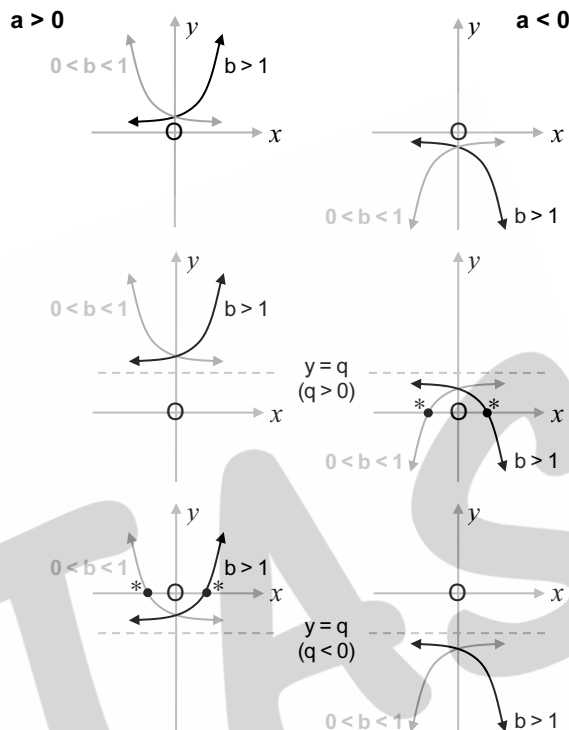


- x -afsnit ($y = 0$) slegs as $q \neq 0$
- geen y -afsnit ($x \neq 0$)
- Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
- Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}, y \neq q$
- Simmetrie-asse:
vir $y = \frac{k}{x} \Rightarrow y = x$ & $y = -x$
& vir $y = \frac{k}{x} + q \Rightarrow y = x + q$
& $y = -x + q$
- Asimptote: $x = 0$ (y -as) & $y = q$



$a > 0$ beteken: a is positief
 $a < 0$ beteken: a is negatief

Eksponensiële funksies: $y = ab^x + q$



- x -afsnit ($y = 0$)
slegs as $a > 0$ & $q < 0$ of
 $a < 0$ & $q > 0$
- y -afsnit ($x = 0$)
 $\Rightarrow (0; a)$ as $q = 0$
andersins $\Rightarrow (0; a + q)$
- Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$
- Waardeversameling:
vir $a > 0, y > q$ &
vir $a < 0, y < q$
- Asimptoot: $y = q$
- Simmetrie-asse:
daar is geen simmetrie-asse
nie

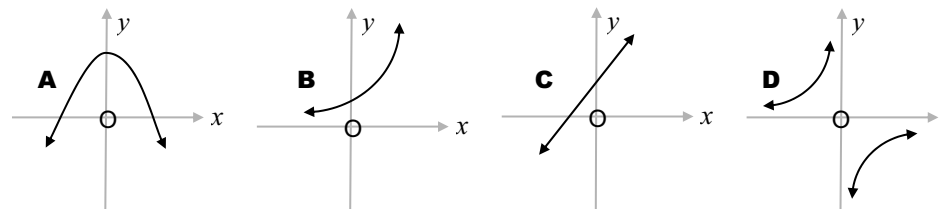
OEFENING 6.9 – Algebraïese grafieke

(Antwoorde op bladsy 6.25)

1. Gegee:

$$y = ax + q; \quad y = ax^2 + q; \quad y = \frac{a}{x} + q; \quad y = ab^x + q \quad (b > 0)$$

1.1 Kies watter een van bostaande vergelykings die grafiek die beste pas.
Gee 'n rede vir jou antwoord.



1.2 Sê in elke geval of $a > 0$ of $a < 0$. Motiveer jou antwoord.

1.3 Sê in elke geval of $q > 0$; $q < 0$ of $q = 0$.
Motiveer jou antwoord.

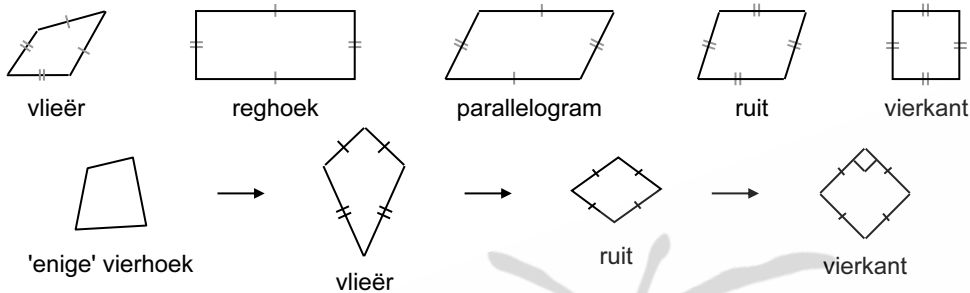
◀ **LW:** q is nie noodwendig
die y -afsnit nie!

VIERHOEKE

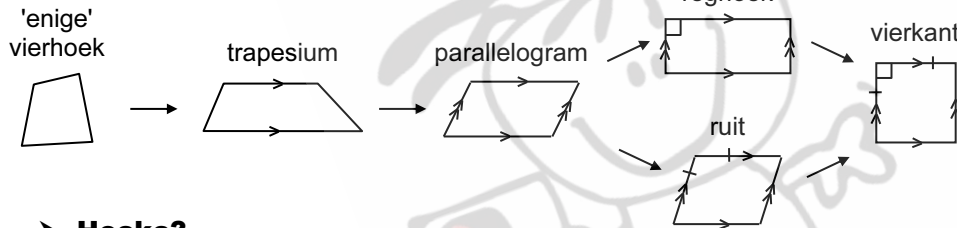
□ Hersiening van Eienskappe van Vierhoeke

- Dink weer aan al die vierhoeke ... (vlieër, trapesium, parallelogram, reghoek, ruit, vierkant).
- Watter *eienskappe* het hulle?

► Gelyke sye?



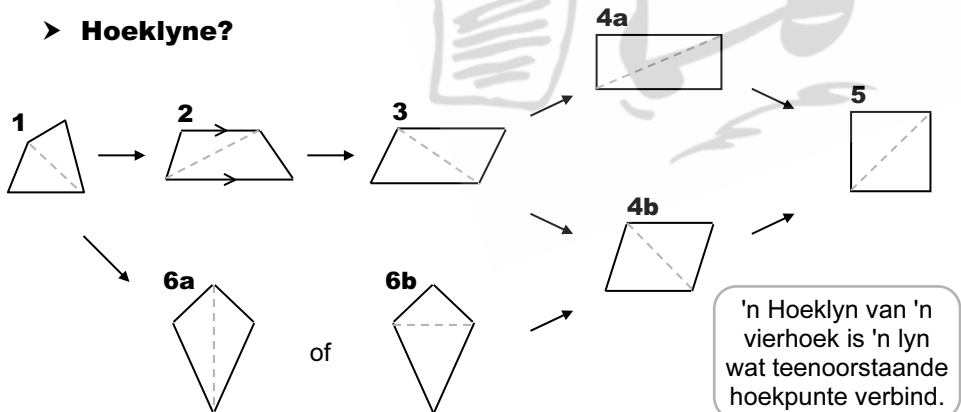
► Parallele sye?



► Hoeke?

Watter is gelyk? Watter is supplementêr? Watter is regte hoeke?

► Hoeklyne?



Onderzoek vierhoeke deur hoeklyne te gebruik:

fig. 1: Gebruik 'n hoeklyn om die som van die binnehoeke van 'n vierhoek te bepaal.

Hoe sou jy die som van die binnehoeke van 'n vyfhoek bepaal? 'n Seshoek?

fig. 2: Gebruik 'n hoeklyn om die oppervlakte van 'n trapesium te bepaal.

fig. 3 - 6: Watter van hierdie vierhoeke se oppervlakte word deur die hoeklyn halveer?

fig. 3 - 6: Teken die tweede hoeklyn. Stel, vir elke figuur, vas of die hoeklyne:

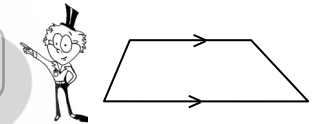
- gelyk is
- mekaar halveer
- mekaar reghoekig sny
- die hoeke van die vierhoek halveer

fig. 6: Bepaal die oppervlakte van 'n vlieër in terme van sy hoeklyne. Kan hierdie formule vir 'n ruit geld? 'n Vierkant?

□ Definieer Vierhoeke

► 'n Trapesium

Definisie: 'n Trapesium is 'n vierhoek met EEN PAAR TEENORSTAANDE SYE parallel.



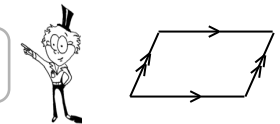
► 'n Parallelogram

Ons ken die *eienskappe* van 'n parallelogram:

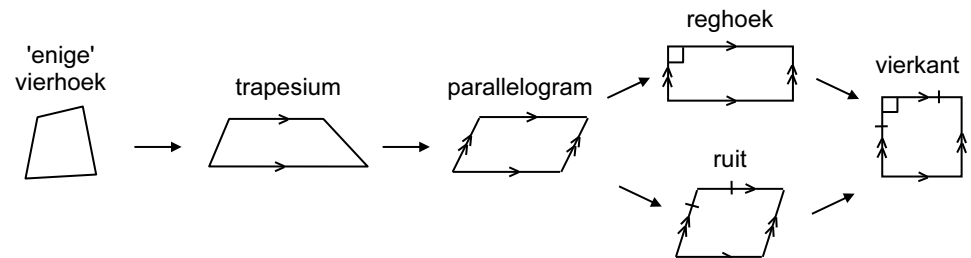
- albei pare teenoorstaande sye is parallel
- albei pare teenoorstaande sye is gelyk
- albei pare teenoorstaande hoeke is gelyk
- hoeklyne halveer mekaar.

Ons gaan egter die parallelogram in terme van sy parallelle sye *definieer*.

Definisie: 'n Parallelogram is 'n vierhoek met TWEE PARE TEENORSTAANDE SYE parallel.



Kyk na die vordering van vierhoeke hieronder, soos ons verdere definisies bespreek:

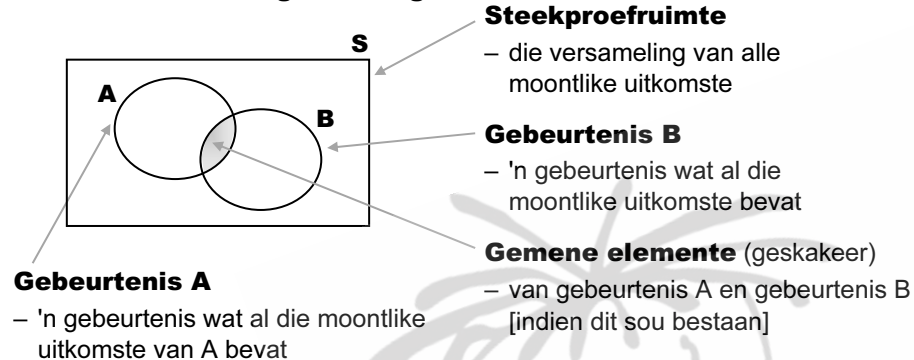


Venn-diagramme

'n Grafiese metode om die uitkomst van twee of meer verskillende gebeurtenisse (met behulp van sirkels); tesame met gemene elemente van die gebeurtenisse (met behulp van oorvleuelende sirkels); asook die steekproefruimte van al die gebeurtenisse (met behulp van 'n reghoek), visueel voor te stel.

Steekproefruimte & Gebeurtenisse

Moontlike Venn-diagramuitleg:

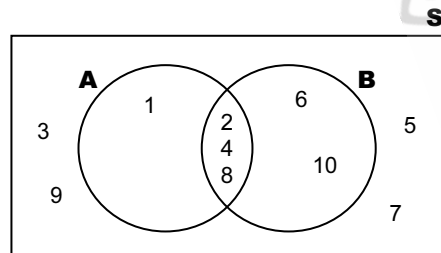


Uitgewerkte Voorbeeld 1

Stel 'n Venn-diagram op om die volgende te illustreer:

- 'n Steekproefruimte vanaf 1 tot 10 (slegs heelgetalle)
- Gebeurtenis A: die faktore van 8
- Gebeurtenis B: die veelvoude van 2

Antwoord



Gebeurtenis A:
Faktore van 8 = {1; 2; 4; 8}
∴ n(A) = 4 elemente

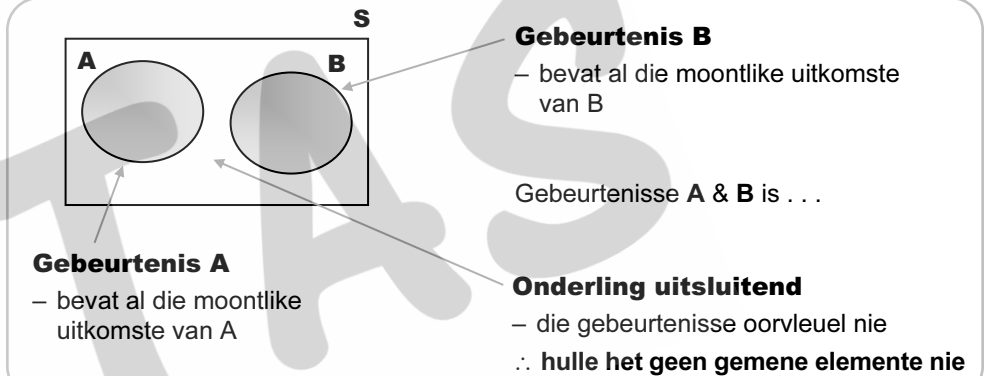
Gebeurtenis B:
Veelvoude van 2 = {2; 4; 6; 8; 10}
∴ n(B) = 5 elemente

Gemene elemente = {2; 4; 8}

Onthou!

- ❖ $n(\text{gebeurtenis})$ = aantal gunstige uitkomst in die gebeurtenis
- ❖ $P(\text{gebeurtenis})$ = waarskynlikheid van die aantal gunstige uitkomst $n(E)$ gedeel deur die totale aantal elemente in die steekproefruimte $n(S)$
d.w.s. $P(E) = \frac{\text{die aantal gunstige uitkomst wat bestaan } n(E)}{\text{die totale aantal moontlike uitkomst } n(S)}$
- ❖ Die som van die waarskynlikhede in die Venn-diagram moet 1 of 100% wees

Onderling Uitsluitende Gebeurtenisse

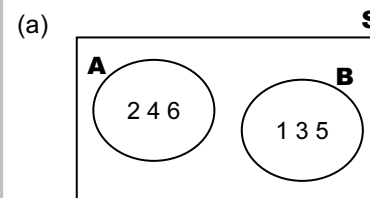


Uitgewerkte Voorbeeld 2

Gegewe dat $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ en dat gebeurtenis A al die ewe getalle en gebeurtenis B al die onewe getalle is:

- Teken 'n Venn-diagram om die situasie te illustreer.
- Is hierdie gebeurtenisse A en B onderling uitsluitend? Gee 'n rede vir jou antwoord.

Antwoorde

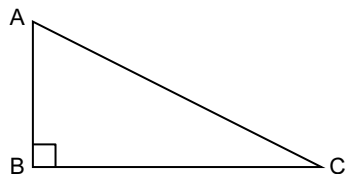


- Ja, hierdie gebeurtenisse is onderling uitsluitend aangesien 'n ewe getal nooit 'n onewe getal kan wees nie.

TRIGONOMETRIE [36]

VRAAG 4

- 4.1 In die diagram hieronder is $\triangle ABC$ met 'n regte hoek by B.



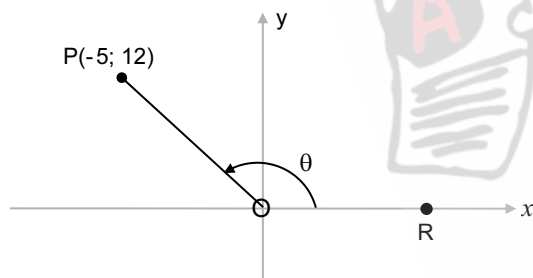
Voltooi die volgende stellings:

4.1.1 $\sin C = \frac{AB}{\dots}$ (1)

4.1.2 $\dots A = \frac{AB}{BC}$ (1)

- 4.2 Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, bepaal die waarde van: $\frac{\sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ}{\sec 45^\circ}$ (4)

- 4.3 In die diagram is $P(-5; 12)$ 'n punt in die Cartesiese vlak en $\hat{ROP} = \theta$.



Bepaal die waarde van:

4.3.1 $\cos \theta$ (3)

4.3.2 $\operatorname{cosec}^2 \theta + 1$ (3) [12]



VRAAG 5

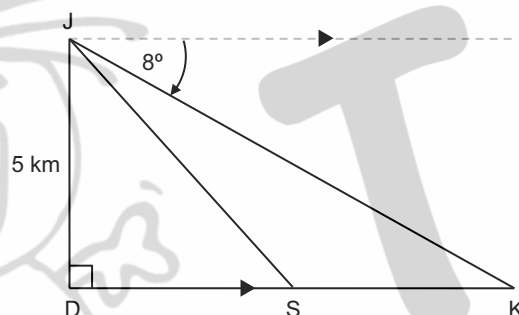
- 5.1 Los op vir x , korrek tot EEN desimale plek, in elk van die volgende vrae waar $0^\circ \leq x < 90^\circ$.

5.1.1 $5 \cos x = 3$ (2)

5.1.2 $\tan 2x = 1,19$ (3)

5.1.3 $4 \sec x - 3 = 5$ (4)

- 5.2 'n Vliegtuig by J vlieg op 'n hoogte van 5 kilometer direk oor 'n punt D op die grond. Die vliegtuig is oppad om by punt K te land. Die dieptehoek van J na K is 8° . S is 'n punt langs die pad van D na K.



- 5.2.1 Skryf die grootte van $\hat{JKD}$ neer. (1)

- 5.2.2 Bereken die afstand DK, korrek tot die naaste meter. (3)

- 5.2.3 Indien die afstand SK, 8 kilometer is, bepaal die afstand DS. (1)

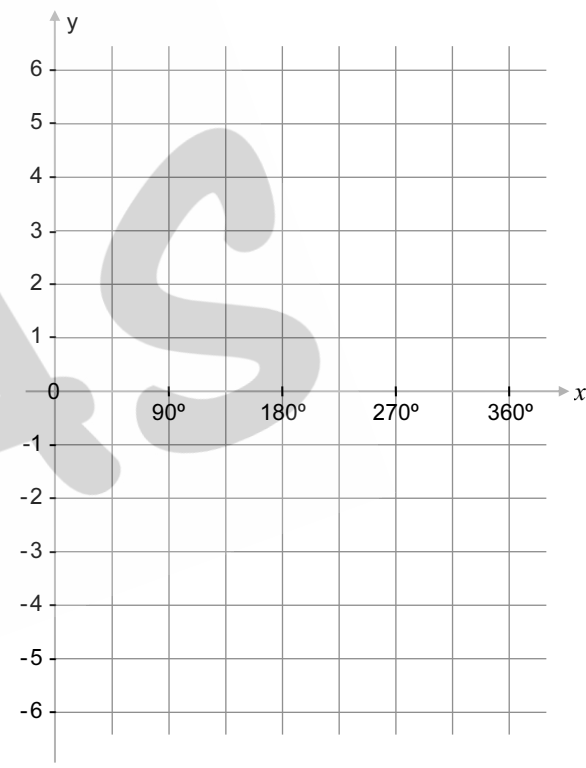
- 5.2.4 Bereken die hoogtehoek van punt S na J, korrek tot EEN desimale plek. (2) [16]

VRAAG 6

- 6.1 Beskou die funksie $y = 2 \tan x$.

- 6.1.1 Maak 'n netjiese skets van $y = 2 \tan x$ vir $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ op die assestelsel hieronder.

Dui duidelik op jou skets die snytpunte met die asse en die asimptote aan.

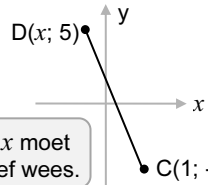


- 6.1.2 Indien die grafiek van $y = 2 \tan x$ gereflekteer word in die x -axis, skryf die vergelyking van die nuwe grafiek neer wat as gevolg van hierdie refleksie verkry word. (1)



3.2

$$CD^2 = (x-1)^2 + (5+2)^2 = (\sqrt{53})^2$$



$$\begin{aligned}\therefore (x-1)^2 + 49 &= 53 \\ \therefore (x-1)^2 &= 4 \\ \therefore x-1 &= \pm 2 \\ \therefore x &= 3 \text{ of } -1\end{aligned}$$

LW: x moet negatief wees.

Maar $x < 0$ in die tweede kwadrant

$\therefore x = -1 \leftarrow \dots$ slegs die neg. waarde van x is geldig

$$4.1.1 \sin C = \frac{AB}{AC} \leftarrow$$

$$4.1.2 \cot A = \frac{AB}{BC}$$

Let Wel: $\tan A = \frac{BC}{AB}$; $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

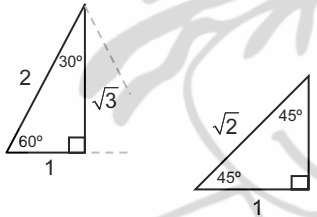
4.2 Die uitdrukking

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

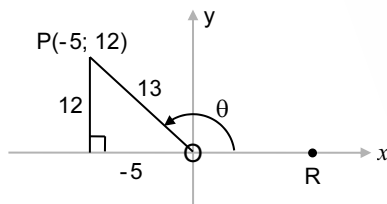
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \dots \text{Die noemer moet gerasionaliseer word}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \leftarrow \dots \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$



4.3.1 $OP = 13$ eenhede $\dots 5 : 12 : 13 \Delta$; Pythagoras



$$\therefore \cos \theta = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13} \leftarrow \dots \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$4.3.2 \sin \theta = \frac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{cosec} \theta = \frac{13}{12}$$

$$\begin{aligned}\therefore \operatorname{cosec}^2 \theta + 1 &= \left(\frac{13}{12}\right)^2 + 1 = \frac{169}{144} + 1 \\ &= \frac{169 + 144}{144} = \frac{313}{144} \leftarrow \left(= 2 \frac{25}{144} \leftarrow\right)\end{aligned}$$

$$5.1.1 \quad 5 \cos x = 3$$

$$\div 5) \therefore \cos x = \frac{3}{5} (= 0,6)$$

$$\therefore x \approx 53,1^\circ \leftarrow \dots \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) =$$

$$5.1.2 \quad \tan 2x = 1,19$$

$$\begin{aligned}\therefore 2x &= 49,958\dots^\circ \dots \tan^{-1} 1,19 = \\ \div 2) \therefore x &\approx 25,0^\circ \leftarrow\end{aligned}$$

$$5.1.3 \quad 4 \sec x - 3 = 5$$

$$+ 3) \therefore 4 \sec x = 8$$

$$\div 4) \therefore \sec x = 2$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ \leftarrow \dots \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$5.2.1 \quad \angle K D = 8^\circ \leftarrow \dots \text{verwisselende } \angle 'e; \parallel \text{ lyne}$$

$$5.2.2 \text{ In } \triangle J D K: \frac{DK}{5} = \cot 8^\circ \dots = \frac{1}{\tan 8^\circ}$$

$$\times 5) \therefore DK = \frac{5}{\tan 8^\circ}$$

$$= 35,5768 \dots \text{ km}$$

$$= 35\,576,8 \text{ meter}$$

$$\approx 35\,577 \text{ meter} \leftarrow$$

$\dots$ korrek tot die naaste meter



$$5.2.3 \quad DS = DK - SK$$

$$= 35,58 \text{ km} - 8 \text{ km}$$

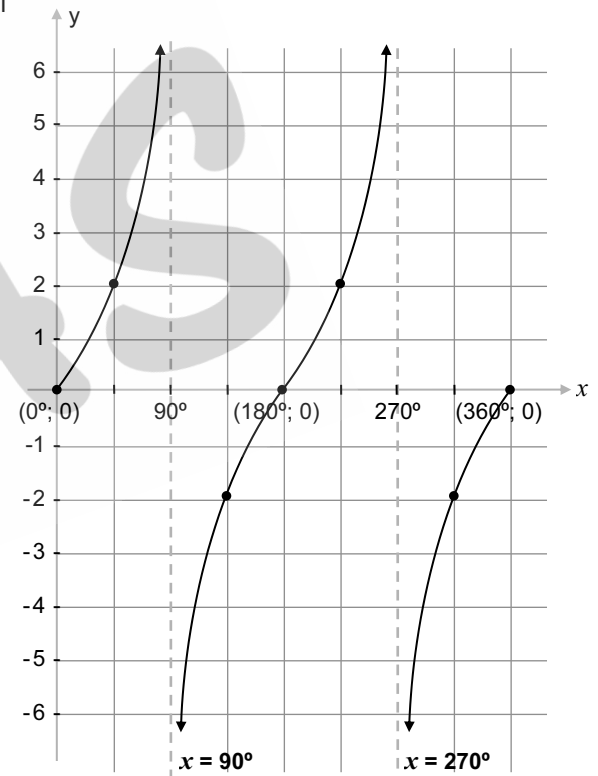
$$= 27,58 \text{ km} \leftarrow$$

$$5.2.4 \quad \tan \hat{JSD} = \frac{5}{27,58}$$

$$\therefore \hat{JSD} \approx 10,3^\circ \leftarrow \dots \tan^{-1}\left(\frac{5}{27,58}\right) =$$

$\dots$ korrek tot 1 des. plek

6.1.1



$$6.1.2 \quad y = -2 \tan x \leftarrow$$

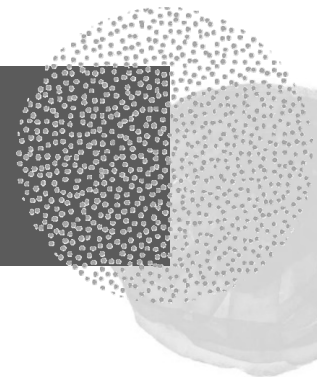
$$6.2.1 \quad a = 4 \leftarrow$$

$$g(x) = a \sin x \Rightarrow g(90^\circ) = a \sin 90^\circ \\ \Rightarrow 4 = a$$

6.2.2 Die waardeversameling van h :

$$-2 \leq y \leq 6 \leftarrow \dots \text{die waardes van } y$$

EUKLIDIESE MEETKUNDE: STELLINGS & AANVAARBARE REDES



LYNE

Die aanliggende hoeke op 'n reguitlyn is supplementêr.	$\angle$ e op 'n reguitlyn
As die aanliggende hoeke supplementêr is, vorm die buitenste bene van die hoeke 'n reguitlyn.	aanligg. $\angle$ e suppl.
Die som van die aanliggende hoeke om 'n punt (omw.) is 360° .	$\angle$ e om 'n punt OF $\angle$ e in 'n omw.
Regoorstaande hoeke is gelyk.	regoorst. $\angle$ e
As $AB \parallel CD$, dan is die verwisselende hoeke gelyk.	verw. $\angle$ e; $AB \parallel CD$
As $AB \parallel CD$, dan is die ooreenkomstige hoeke gelyk.	ooreenk. $\angle$ e; $AB \parallel CD$
As $AB \parallel CD$, dan is die ko-binnehoeke supplementêr.	ko-binne $\angle$ e; $AB \parallel CD$
As die verwisselende hoeke tussen twee lyne gelyk is, dan is die lyne ewewydig/parallel.	verw. $\angle$ e =
As die ooreenkomstige hoeke tussen twee lyne gelyk is, dan is die lyne ewewydig.	ooreenk. $\angle$ e =
As die ko-binnehoeke tussen twee lyne supplementêr is, dan is die lyne ewewydig.	ko-binne $\angle$ e suppl.

DRIEHOEKE

Die binnehoeke van 'n driehoek is supplementêr.	$\angle$ som van Δ OF som van $\angle$ e in Δ OF binne $\angle$ e in Δ
Die buitehoek van 'n driehoek is gelyk aan die som van die twee teenoorstaande binnehoeke.	buite $\angle$ van Δ
Die hoeke teenoor die gelyke sye in 'n gelykbenige driehoek, is gelyk.	$\angle$ e teenoor gelyke sye
Die sye teenoor die gelyke hoeke van 'n gelykbenige driehoek, is gelyk.	sye teenoor gelyke $\angle$ e
In 'n reghoekige driehoek is die vierkant van die skuinssy gelyk aan die som van die vierkante van die ander twee sye.	Pythagoras OF Stelling van Pythagoras
As die vierkant van een sy van 'n driehoek gelyk is aan die som van die vierkante van die ander twee sye, dan is die driehoek reghoekig.	Omgekeerde Pythagoras OF Omgekeerde Stelling van Pythagoras
As drie sye van een driehoek onderskeidelik gelyk is aan drie sye van 'n ander driehoek, dan is die driehoeke kongruent.	SSS
As twee sye en 'n ingeslote hoek van een driehoek onderskeidelik gelyk is aan twee sye en 'n ingeslote hoek van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	SHS OF $S\angle S$
As twee hoeke en 'n sy van een driehoek onderskeidelik gelyk is aan twee hoeke en 'n ooreenstemmende sy van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	HHS OF $\angle \angle S$