

# 2023 DIAGNOSTIESE VERSLAG (DBO NOV 2022 V1)

## VRAAG 1 65%

1.1 Los op vir  $x$ :

76% 1.1.1  $(3x - 6)(x + 2) = 0$  (2)

1.1.2  $2x^2 - 6x + 1 = 0$  (korrek tot TWEE desimale plekke) (3)

1.1.3  $x^2 - 90 > x$  (4)

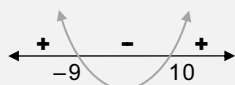
### Memo

1.1.1  $(3x - 6)(x + 2) = 0$   
 $\therefore 3(x - 2)(x + 2) = 0$   
 $\therefore x - 2 = 0$  of  $x + 2 = 0$   
 $\therefore x = \pm 2 <$



1.1.2  $2x^2 - 6x + 1 = 0$   
 $\therefore x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} \dots x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$   
 $= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 8}}{4}$   
 $= \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4}$   
 $\approx 2,82$  of  $0,18 <$

1.1.3  $x^2 - 90 > x$   
 $\therefore x^2 - x - 90 > 0$   
 $\therefore (x + 9)(x - 10) > 0$



$\therefore x < -9$  of  $x > 10 <$

## Algemene Foute en Wanopvattinge

- (a) In **V1.1.1** het sommige kandidate **die hakies eerste vermenigvuldig**, maar **het dan verkeerd gefaktoriseer**.
- (b) Dit is steeds vir sommige kandidate moeilik om die antwoorde tot twee desimale plekke af te rond. Sommige kandidate beskik steeds nie oor basiese sakrekenaarvaardighede nie. 'n Paar kandidate het die waarde van **b** in **V1.1.2** as **6 in plaas van -6** geneem.
- (c) In die beantwoording van **V1.1.3** het baie kandidate **die ongelykheid as 'n vergelyking** hanteer. Hulle antwoord het gelees:  **$(x + 9)(x - 10) > 0$**  gevolg deur  **$x > -9$  of  $x > 10$** .

Baie kandidate het gesukkel om die korrekte antwoord vanaf die ongelykheid te interpreteer.

$$x^2 - x - 90 > 0$$
$$(x + 9)(x - 10) > 0$$
$$\therefore x = -9 \text{ of } x = 10$$
$$\therefore -9 < x < 10$$

Sommige kandidate het 'n **skets** gemaak, maar kon dit nie gebruik om die antwoord wat vereis is, neer te skryf nie. Nog 'n algemene fout was die **verkeerde notasie** in die antwoord. Kandidate het die antwoord as  **$-9 < x > 10$**  geskryf in plaas van  **$x < -9$  of  $x > 10$** .

## Algemene Foute en Wanopvattinge



$$1.1.4 \quad x - 7\sqrt{x} = -12 \quad (4)$$

$$1.1.4 \quad x - 7\sqrt{x} = -12$$

$$\therefore (\sqrt{x})^2 - 7\sqrt{x} + 12 = 0$$

$$\therefore (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 4) = 0$$

$$\therefore \sqrt{x} = 3 \text{ of } 4$$

$$\therefore x = 9 \text{ of } 16 \leftarrow \dots \text{ beide geldig}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{OF: } +7\sqrt{x} = +x + 12 \\ 49x = x^2 + 24x + 144 \\ 0 = x^2 - 25x + 144 \\ 0 = (x - 9)(x - 16) \\ \therefore x = 9 \text{ of } x = 16 \leftarrow \end{array} \right]$$

1.2 Los gelyktydig vir  $x$  en  $y$  op:

85%

$$2x - y = 2$$

$$xy = 4$$

(5)

$$1.2 \quad 2x - y = 2$$

$$\therefore 2x - 2 = y \quad \dots \text{ ①}$$

$$xy = 4 \quad \dots \text{ ②}$$

$$\text{① in ②: } \therefore x(2x - 2) = 4$$

$$\therefore 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$(+2) \quad \therefore x^2 - x - 2 = 0$$

$$\therefore (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ of } -1$$

$$\text{Vir } x = 2: \quad y = 2(2) - 2 = 2$$

$$\& \text{ Vir } x = -1: \quad y = 2(-1) - 2 = -4$$

$$\therefore \text{ Oplossing: } (2; 2) \text{ of } (-1; -4) \leftarrow$$

- (d) Die meeste kandidate het een of ander idee gehad dat hulle albei kante van die vergelyking in **V1.1.4** moes kwadreer. 'n Paar kandidate kon egter **die wortelvorm isoleer voordat** hulle albei kante van die vergelyking kwadreer het.

Die volgende foute is opgemerk:

$$(x - 7\sqrt{x})^2 = (-12)^2 \quad \text{of} \quad x - 7\sqrt{x} = -12$$

$$\therefore x^2 - 49x = 144 \quad \therefore \sqrt{x} = \frac{-12}{x-7}$$

**Geen idee nie!**

- (e) Alhoewel baie kandidate **V1.2** korrek beantwoord het, het 'n paar foute gemaak toe hulle die lineêre vergelyking in terme van een veranderlike geskryf het. Sommige kandidate het 'n geldige oplossing geïgnoreer. Hulle het gelyktydige vergelykings met wortelvergelings verwar.

- 1.3 Toon dat  $2 \cdot 5^n - 5^{n+1} + 5^{n+2}$  ewe is vir alle positiewe heelgetalwaardes van  $n$ . (3)

41%

### Memo

$$\begin{aligned}
 1.3 \quad & 2 \cdot 5^n - 5^{n+1} + 5^{n+2} \\
 & = 2 \cdot 5^n - 5^n \cdot 5 + 5^n \cdot 5^2 \\
 & = 5^n (2 - 5 + 25) \\
 & = 5^n (22) \\
 & = 2(5^n \times 11), \text{ 'n ewe getal vir alle } n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

- 1.4 Geherformuleerde vraag.

22%

Bepaal een paar heelgetalwaardes van  $x$  en  $y$  waarvoor:

$$\frac{3^{y+1}}{32} = \sqrt{96^x} \quad (4) [25]$$

### Memo

$$\begin{aligned}
 1.4 \quad & \frac{3^{y+1}}{32} = \sqrt{96^x} \\
 \therefore & \frac{3^{y+1}}{2^5} = \sqrt{(2^5 \cdot 3)^x} \\
 \therefore & 2^{-5} \cdot 3^{y+1} = 2^{\frac{5x}{2}} \cdot 3^{\frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

As ons die eksponente van die 2's en die 3's gelykstel

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{5x}{2} &= -5 & \text{en} & \quad \frac{x}{2} = y + 1 \\
 \therefore 5x &= -10 & \therefore \frac{-2}{2} &= y + 1 \\
 \therefore x &= -2 & \therefore y &= -2
 \end{aligned}$$

$\therefore$  'n Oplossing is:  $(-2; -2) \leftarrow$

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 96 \\
 2 & 48 \\
 2 & 24 \\
 2 & 12 \\
 2 & 6 \\
 3 & 3 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 96 & = 2^5 \cdot 3
 \end{array}$$

- (f) In **V1.3** kon baie kandidate die eksponente met afsonderlike grondtalle skryf, d.w.s.  $2 \cdot 5^n - 5^{n+1} + 5^{n+2} = 2 \cdot 5^n - 5^n \cdot 5 + 5^n \cdot 5^2$ .

Sommige kon egter **nie** die daaropvolgende uitdrukking **korrek faktoriseer nie**, d.w.s.  $2 \cdot 5^n - 5^n \cdot 5 + 5^n \cdot 5^2 = 5^n (2 \cdot 1^n - 1^n \cdot 5 + 1^n \cdot 5^2)$ .

Die meerderheid van die kandidate **kon nie verduidelik waarom**  $5^n(22)$  **ewe** getalle vir alle positiewe heelgetalwaardes van  $n$  sal wees nie.

- (g) Baie kandidate het nie geweet hoe om **V1.4** te beantwoord nie. Hulle **kon nie** albei kante van die vergelyking **as eksponente** wat **dieselfde grondtalle het, skryf nie**.

### Let Wel:



Daar is **2** vergelykings in  $x$  en  $y$  nodig om 0, 1 of 2 oplossings te vind. Daar is eintlik 'n oneindige aantal oplossings indien slegs 1 vergelyking gegee word. Daar word egter heeltallige oplossings gevra, daarom is daar slegs een moontlike oplossing.

## VRAAG 1: Voorstelle vir Verbetering



- (a) Baie van die **werk** in hierdie vraag is **in Graad 11 behandel**. Dit is dus belangrik dat onderwysers **regdeur die Graad 12-jaar hersieningstake** oor hierdie afdelings opstel.
- (b) Onderwysers moenie sommer net aanneem dat leerders weet hoe om 'n getal tot 'n vereiste aantal plekke **af te rond** nie. Hierdie vaardigheid moet, waar nodig, in Graad 11 en 12 weer aangeleer word. Onderwysers moet leerders penaliseer indien hulle in SBA-take nie tot die **korrekte aantal plekke** afrond nie.
- (c) Onderwysers moet, verkieslik in **Graad 10**, tyd afstaan om daarop te fokus om vir leerders te leer hoe om **ongelykhede** (bv.  $-3 < x < 5$  ;  $x < -3$  of  $x > 5$ ) **op 'n getallelyn voor te stel en** ook hoe **om 'n ongelykheid** vanaf die illustrasie op 'n getallelyn neer te skryf. Leerders sal hierby baat vind aangesien hulle vir 'n hele aantal vrae in albei eksamenvraestelle ongelykheidsoplossings moet kan neerskryf. Die klem op die korrekte notasie is noodsaaklik wanneer oplossings vir ongelykhede neergeskryf word.
- Ongelykhede**
- (d) Onderwysers moet die **verskil tussen *en* en *of*** in die konteks van **ongelykhede** verduidelik. Leerders kan nie sommer net die een óf die ander gebruik nie, aangesien hulle verskillende betekenisse het.
- (e) Wanneer met **wortelvergelykings** gewerk word, moet leerders herinner word dat hulle die **wortelteken moet isoleer** voordat hulle **albei kante** van die vergelyking kan **kwadreer**. Onderwysers moet klem daarop lê dat daar **vanselfsprekende beperkings** op wortelvergelykings geplaas word en dat leerders moet aanhou **toets** of hul **antwoorde** die oorspronklike vergelyking bevredig.
- (f) Leerders moet aan **ingewikkelde vrae** wat **wortelvorme** en **eksponente** insluit, blootgestel word.

## VRAAG 2 50%

2.1 Die eerste term van 'n meetkundige reeks is 14 en die 6<sup>de</sup> term is 448.

55%

2.1.1 Bereken die waarde van die konstante verhouding,  $r$ . (2)


2.1.2 Bepaal die aantal opeenvolgende terme wat by die eerste 6 terme van die reeks getel moet word om 'n som van 114 674 te kry. (4)

2.1.3 Indien die eerste term van 'n ander reeks 448 en die 6<sup>de</sup> term 14 is, bereken die som tot oneindigheid van die nuwe reeks. (3)

### Memo

2. M.R.:  $a = 14$  en  $T_6 = 448$ ;  $r$ ?

$$\begin{aligned} 2.1.1 \quad T_6 &= ar^5 = 448 \quad \dots \quad \boxed{T_n = ar^{n-1}} \\ \therefore 14r^5 &= 448 \\ \therefore r^5 &= 32 \\ \therefore r &= 2 \quad \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.1.2 \quad 114\,674 &= \frac{14(2^n - 1)}{2 - 1} \quad \dots \quad \boxed{S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}} \\ \therefore \frac{114\,674}{14} &= 2^n - 1 \\ \therefore \frac{114\,674}{14} + 1 &= 2^n \\ \therefore 8\,192 &= 2^n \\ \therefore 2^{13} &= 2^n \\ \therefore n &= 13 \end{aligned}$$


$\therefore$  Aantal opeenvolgende terme bygevoeg =  $13 - 6$   
= 7  $\leftarrow$

2.1.3  $T_1 = 448$  &  $T_6 = 14$

$$\therefore a = 448 \text{ & } r = \frac{1}{2} \quad \dots \quad \text{Die gegewe reeks is omgekeer!}$$

$$\therefore \boxed{S_\infty = \frac{a}{1-r}} = \frac{448}{1 - \frac{1}{2}} = 896 \quad \leftarrow$$

## Algemene Foute en Wanopvattinge

(a) Baie kandidate **het nie verstaan** wat in **V2.1.2** van hulle verwag is nie.

Hulle het korrek bereken dat die som van die eerste 13 terme 114 674

was. Hulle **het** egter **nie** 6 van 13 afgetrek om **die vereiste vraag te beantwoord nie.**

(b) Terwyl baie kandidate **V2.1.3** korrek beantwoord het, het sommige kandidate nie beseft dat vir 'n **konvergerende meetkundige reeks**, die waarde van  $r$  in die interval  **$-1 < r < 1$**  moet lê nie.

2.2 Indien  $\sum_{p=0}^k \left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{6}\right) = 20\frac{1}{6}$ , bepaal die waarde van  $k$ .  
**42%** (5)  
 [14]

**Memo**

$$2.2 \sum_{p=0}^k \left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{6}\right) = \left[\frac{1}{3}(0) + \frac{1}{6}\right] + \left[\frac{1}{3}(1) + \frac{1}{6}\right] + \left[\frac{1}{3}(2) + \frac{1}{6}\right] + \dots$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \dots$$

$$\left[ T_3 - T_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad \& \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \right]$$

**RR**  $a = \frac{1}{6}$  en  $d = \frac{1}{3}$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\therefore 20\frac{1}{6} = \frac{n}{2} \left[ 2\left(\frac{1}{6}\right) + (n-1)\left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

$$\therefore \frac{121}{6} = \frac{n}{2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} \right]$$

$$\therefore 121 = 3n \left[ \frac{1}{3}n \right]$$

$$= n^2$$

$$\therefore n = 11$$

$$\therefore k = 10 \leftarrow (\text{want } p \text{ begin by } 0)$$



(c) In **V2.2** kon baie kandidate nie die **sigma-notasie** korrek interpreteer nie. Party van hulle het verkeerdelik gedink **die algemene term** wat in die **sigma-notasie** gegee is, stel 'n meetkundige reeks voor. 'n Redelike aantal kandidate kon nie die eerste drie terme van die reeks bereken nie en was gevolglik **nie in staat om die gemene verskil te bereken nie.**

'n Aantal kandidate kon nie die afleiding maak dat  **$n = k + 1$**  is nie.

Sommige kandidate het verkeerdelik aangeneem dat  **$T_n = 20\frac{1}{6}$**  in plaas

**van  $S_n = 20\frac{1}{6}$ .**



## VRAAG 2: Voorstelle vir Verbetering



- (a) Leerders moet geleer word hoe om die **tipe reeks** waarmee hul werk, en **watter formules** daarop van toepassing is, te **identifiseer**.
- (b) Maak leerders bewus van watter formules op die **inligtingsblad** op watter tipe reeks van toepassing is. Dit is goeie oefening vir leerders om die inligtingsblad in die klas te gebruik sodat hulle dit kan gewoond raak.
- (c) Leer vir leerders hoe om te **identifiseer of** die vraag van hulle verwag om die **waarde van die  $n^{\text{de}}$  term of die som van die eerste  $n$  terme** te bereken.
- (d) Leerders moet die **vrae noukeurig lees** sodat hulle weet wat van hulle verwag word.
- (e) Herinner leerders dat  **$n$  nie 'n negatiewe getal, nul of 'n breuk kan wees nie**. Wanneer  $n$  opgelos word, moet leerders by **'n natuurlike getal**-oplossing uitkom. As dit nie die geval is nie, moet hulle weet hulle het êrens in hul berekening 'n fout gemaak. Daar moet vir leerders gesê word dat hulle geen punte sal kry indien hulle hul antwoorde tot 'n natuurlike getal **afrond** nie.
- (f) Dit is belangrik om, met behulp van 'n voorbeeld, die **konsep van 'n konvergerende meetkundige reeks** te demonstreer, deur eers 'n waarde van  $r > 1$  en dan 'n waarde van  $-1 < r < 1$  te neem. Dit sal leerders bedag maak op die voorwaarde waarvoor 'n meetkundige reeks sal konvergeer.
- (g) Daar moet meer aandag gegee word aan die uitbreiding van 'n reeks wat in **sigma-notasie** vorm gegee word.

### VRAAG 3 64%

Daar word gegee dat die algemene term van 'n kwadratiese getalpatroon  $T_n = n^2 + bn + 9$  is en dat die eerste term van die eerste verskille 7 is.

3.1 Toon dat  $b = 4$ . (2)

77%

3.2 Bepaal die waarde van die 60<sup>ste</sup> term van hierdie getalpatroon. (2)

88%

#### Memo

3.1 Kwadratiese getalpatroon

$$T_n = n^2 + bn + 9$$

$$T_1 = 1 + b + 9 = b + 10$$

$$T_2 = 2^2 + 2b + 9 = 2b + 13$$

$$\therefore (2b + 13) - (b + 10) = 7 \quad \dots \text{Die 1}^{ste} \text{ term van} \\ \dots \text{die 1}^{ste} \text{ verskille}$$

$$\therefore b + 3 = 7$$

$$\therefore b = 4 \quad \blacktriangleleft$$

3.2  $T_{60} = 60^2 + (4)(60) + 9$

$$= 3\,849 \quad \blacktriangleleft$$

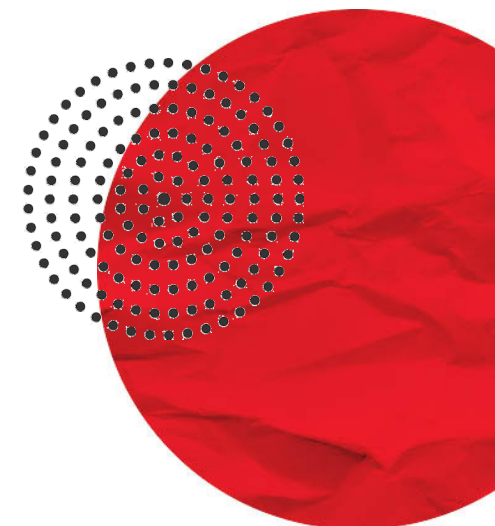


### Algemene Foute en Wanopvattinge

(a) Met die beantwoording van **V3.1**, kon baie kandidate nie daarin slaag om uit die vraag te identifiseer dat  $a = 1$  en dat  $3a + b = 7$  nie.

In plaas daarvan het hulle in hul berekeninge  $b = 4$  gebruik om te

bewys dat die **eerste van die eerste verskille**, 7 is.





3.3 Bepaal die algemene term vir die ry van eerste verskille van die kwadratiese getalpatroon.

58%

Skryf jou antwoord in die vorm  $T_p = mp + q$ . (3)

3.4 Watter TWEE opeenvolgende terme in die kwadratiese getalpatroon het 'n eerste verskil van 157? (3)

46%

[10]

### Memo

3.3 14 21 30 41  
       7 9 11

Ons weet dit is 'n lineêre vergelyking



$T_p = 2p + 5$  < ... deur inspeksie

OF:  $T_p = mp + q$

$\therefore T_1 = m + q = 7$  ... ①

&  $T_2 = 2m + q = 9$  ... ②

② - ①:  $\therefore m = 2$

①: &  $q = 5$

$\therefore$  Die algemene term is:  $T_p = 2p + 5$  <

3.4 Die algemene term van die 1<sup>ste</sup> verskille:

$2n + 5 = 157$

$\therefore 2n = 152$

$\therefore n = 76$

$\therefore$  Die 2 opeenvolgende terme van die kwadratiese getalpatroon is die 76<sup>ste</sup> en 77<sup>ste</sup> <

OF: Laat die opeenvolgende terme wees

$T_n$  en  $T_{n+1}$ ; dan:

$T_{n+1} - T_n = 157$

$\therefore [(n+1)^2 + 4(n+1) + 9] - [n^2 + 4n + 9] = 157$

$\therefore n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 9 - n^2 - 4n - 9 = 157$

$\therefore 2n + 5 = 157$

$\therefore 2n = 152$

$\therefore n = 76, \text{ ens.}$

(b) Baie kandidate kon **V3.3** korrek beantwoord. Hulle kon egter nie die

verband tussen **V3.3** en **V3.4** sien nie. In die beantwoording van

V3.4, het baie kandidate verkeerdelik gestel dat  $n^2 + 4n + 9 = 157$ .



### VRAAG 3: Voorstelle vir Verbetering



(a) Wanneer kwadratiese getalpatrone aangeleer word, is dit noodsaaklik om leerders te wys hoe die formules:

$T_1 = a + b + c$ , die eerste term van die eerste verskille =  $3a + b$  en die tweede verskil =  $2a$ , afgelei word.

(b) Die reeks eerste verskille van 'n **kwadratiese getalpatroon** vorm 'n **rekenkundige patroon**. Dit impliseer dat 'n rekenkundige reeks in 'n kwadratiese getalpatroon ingesluit word. Leerders moet die vraag baie noukeurig lees om vas te stel na watter patroon die vraag verwys. Deur die woorde net vinnig met die oog te vang, lei daartoe dat leerders verkeerde stellings maak.

(c) Herinner leerders dat  $n$  nie 'n negatiewe getal, nul of 'n breuk kan wees nie. Wanneer  $n$  opgelos word, moet leerders by 'n **natuurlike getal**-oplossing uitkom. As dit nie die geval is nie, moet hulle weet hulle het êrens in hul berekening 'n fout gemaak.

(d) Onderwysers moet **kwadratiese getalpatrone met** rekenkundige patrone en **kwadratiese funksies integreer**. Dit sal aan leerders die vaardighede gee om hoërorde vrae te kan hanteer.

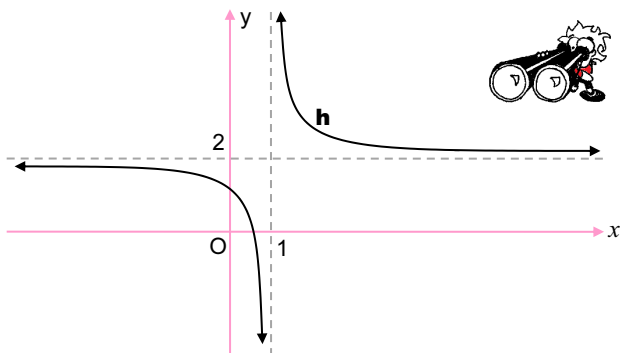


## VRAAG 4 54%

### Standaardvorm!

4.1 Die grafiek van  $h(x) = \frac{1}{x+p} + q$  is hieronder geskets.

**53%** Die asimptoot van  $h$  sny by die punt (1; 2).



- 4.1.1 Skryf die waardes van  $p$  en  $q$  neer. (2)  
4.1.2 Bereken die koördinate van die  $x$ -afsnit van  $h$ . (2)  
4.1.3 Skryf die  $x$ -koördinaat van die  $x$ -afsnit van  $g$  neer, indien  $g(x) = h(x+3)$ . (2)

### Memo

4.1.1  $p = -1 < \quad q = 2 <$

4.1.2 **X-afsnit:** Stel  $y = 0$  in, in  $y = \frac{1}{x-1} + 2$

$$\therefore -2 = \frac{1}{x-1}$$

$$\therefore x-1 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}; 0\right) <$$

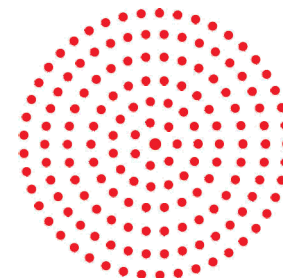
4.1.3 Die  $x$ - koördinaat:  $x = -2\frac{1}{2} < \dots \frac{1}{2} - 3$

[LW:  $g$  is  $h$  3 eenhede na links geskuif.]

## Algemene Foute en Wanopvattinge

- (a) Met die beantwoording van **V4.1.1** het 'n aantal kandidate verkeerdelik gestel dat  $p = 1$  in plaas van  **$p = -1$** .

**Skuif regs dan is  $p$  neg.**



- (b) Baie kandidate het **V4.1.2** korrek beantwoord. Hulle het egter nie beseef dat hulle die  **$x$ -afsnit 3 eenhede na links moes transleer** om by die antwoord vir **V4.1.3** uit te kom nie. Die uitdaging in hierdie vraag was dat kandidate nie die notasie korrek kon interpreteer nie.

**Skuif links dan is  $p$  pos.**

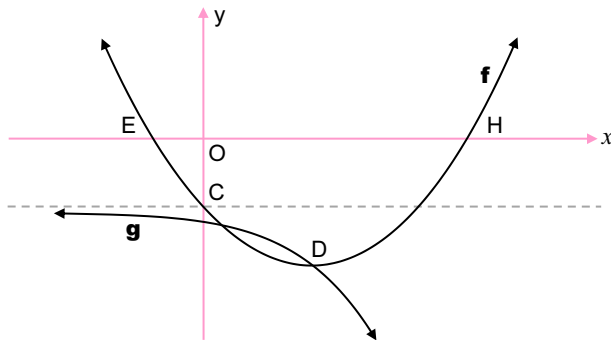
4.1.4 Die vergelyking van 'n simmetrie-as van  $h$  is  $y = x + t$ . Bepaal die waarde van  $t$ . (2)

4.1.5 Bepaal die waardes van  $x$  waarvoor  $-2 \leq \frac{1}{x-1}$ . (3)

4.2 Die grafieke van  $f(x) = x^2 - 4x - 5$  en  $g(x) = a \cdot 2^x + q$  is hieronder geskets.

55%

- E en H is die  $x$ -afsnitte van  $f$ .
- C is die  $y$ -afsnit van  $f$  en lê op die asimptoot van  $g$ .
- Die twee grafieke sny by D, die draaipunt van  $f$ .



4.2.1 Skryf die  $y$ -koördinaat van C neer. (1)

### Memo

4.1.4 [LW: Hierdie simmetrie-as het 'n positiewe gradiënt.]

Die simmetrie-as gaan deur die punt (1; 2)

$$\begin{aligned} \therefore \text{Stel in, in } y &= x + t \\ 2 &= 1 + t \\ \therefore t &= 1 \end{aligned}$$

4.1.5  $h(x) = \frac{1}{x-1} + 2$

$$\begin{aligned} h(x) \geq 0 &\Rightarrow \frac{1}{x-1} + 2 \geq 0 \\ \therefore \frac{1}{x-1} &\geq -2 \end{aligned}$$

$h(x) \geq 0$  vir  $x \leq \frac{1}{2}$  of  $x > 1$

4.2.1  $y_C = -5$



(c) Die algemeenste fout wat kandidate in die beantwoording van **V4.1.5** gemaak het, was om die vergelyking algebraïes op te los. Kandidate **kon nie daarin slaag om die gegewe ongelijkheid met die gegewe hiperbool in verband te bring nie.**

**GEBRUIK DIE GRAFIEK om die ongelijkheid op te los!**



- 4.2.2 Bepaal die koördinate van D. (2)
- 4.2.3 Bepaal die waardes van a en q. (3)
- 4.2.4 Skryf die waardeversameling van g neer. (1)
- 4.2.5 Bepaal die waardes van k waarvoor die waarde van  $f(x) - k$  altyd positief sal wees. (2)
- [20]**

### Memo

$$4.2.2 \text{ By D: } x = -\frac{b}{2a} \quad \left( \begin{array}{l} \text{OF: } f'(x) = 0 \\ \therefore 2x - 4 = 0 \\ \therefore x = 2 \text{ ens.} \end{array} \right)$$

$$= -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

$$\& y = 2^2 - 4(2) - 5 = -9$$

$$\therefore \text{Pt D is } (2; -9) \leftarrow \left( \begin{array}{l} \text{OF: } y = x^2 - 4x - 5 \\ \therefore y = (x+1)(x-5) \\ \therefore \text{Die wortels is } -1 \& 5 \\ \therefore x_D = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ ens.} \end{array} \right)$$

4.2.3  $g(x) = a \cdot 2^x + q$   
 $q = y_c = -5 \leftarrow \dots y = q$  is die asimptoot van g

D(2; -9) op g:  $\therefore -9 = a \cdot 2^2 - 5$   
 $\therefore -4 = 4a$   
 $\therefore a = -1 \leftarrow$



4.2.4  $y \in \mathbb{R}; y < -5 \leftarrow$

4.2.5  $y = f(x) + 9$  sal  $\geq 0$  wees (d.w.s. raak die x-as)  
 $\therefore -k > 9$   
 $\therefore k < -9 \leftarrow$

$\left( \text{OF: vir } f(x) = x^2 - 4x - 5 - k, \Delta < 0, \text{ ens.} \right)$

(d) In **V4.2.2** kon baie kandidate die **simmetrie-as korrek** bereken, **maar kon nie** die y-koördinaat van die draaipunt korrek bereken nie.

(e) Alhoewel baie kandidate in **V4.2.3** die waarde van q **korrek** gehad het, kon hulle **nie** die waarde van a korrek bereken nie.

(f) Die algemeenste fout in **V4.2.4** was **notasie**. Kandidate het  $y \in (-5; -\infty)$  of  $y \in (-\infty; -5)$  in plaas van slegs  $y \in (-\infty; -5)$  geskryf.

**WAARDEVERSAMELING**

(g) Baie min kandidate het probeer om **V4.2.5** te beantwoord omdat hulle **nie** die notasie wat in die vraag gebruik is, kon **interpreteer nie**.

**GEBRUIK GRAFIEKE om k te bepaal**

## VRAAG 4: Voorstelle vir Verbetering



- (a) Onderwysers moet meer aandag daaraan gee om die korrekte **notasie** te gebruik wanneer hulle **intervalle** skryf. Gee aandag aan die betekenis van die notasie en die verskil tussen die **verskillende notasies**. Onderwysers moenie die gebruik van die verkeerde notasie in SBA-take toelaat nie.

- (b) 'n Hiperbool kan op twee maniere gedefinieer word, nl.  $y = \frac{a}{x+p} + q$  en  ~~$y = \frac{a}{x-p} + q$~~ .

**INTERVALLE**

Onderwysers word aangeraai om  $y = \frac{a}{x+p} + q$  te gebruik aangesien **in die KABV** daarna verwys word. Dit lyk asof die leerders nie aandag gee aan die **verskil in tekens** tussen die twee vergelykings nie. Hulle word egter gepenaliseer indien hulle die waarde van  $p$  verkeerd neerskryf.

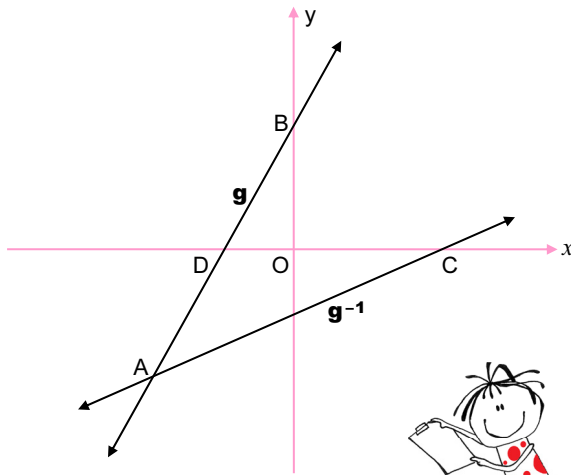
**Transformasies is in die Senior Fase KABV kurrikulum**, maar is in die huidige ATP's (Aangepaste Onderrigprogramme) uitgesluit.

- (c) **Transformasie** is nie meer 'n onderwerp in die kurrikulum nie. In **die afdeling oor funksies word die basiese grafiek egter getransformeer om alle ander grafieke te verkry**. Die effek van die transformasie op die vergelyking van die basiese grafiek moet bespreek word. Wanneer hulle dit doen, word ook voorgestel dat onderwysers sal aandag gee aan **die effek** wat die **transformasie** op die **basiese vergelyking** het, of andersom.
- (d) Leerders moet daarvan bewus gemaak word dat 'n ongelykheid wat breuke bevat, nie op dieselfde manier as 'n vergelyking opgelos kan word nie. Wanneer 'n vergelyking opgelos word, vermenigvuldig ons beide kante met die KGD om die breuke te elimineer. Wanneer 'n ongelykheid opgelos word, vermenigvuldig ons albei kante met die  $(KGD)^2$ .

## VRAAG 5 54%

Die grafieke van  $g(x) = 2x + 6$  en  $g^{-1}$ , die inverse van  $g$ , word in die diagram hieronder getoon.

- D en B is onderskeidelik die  $x$ - en  $y$ -afsnitte van  $g$ .
- C is die  $x$ -afsnit van  $g^{-1}$ .
- Die grafieke van  $g$  en  $g^{-1}$  sny by A.



5.1 Skryf die  $y$ -koördinaat van B neer.

91%

(1)

5.2 Bepaal die vergelyking van  $g^{-1}$  in die vorm

62%  $g^{-1}(x) = mx + n$ .

(2)

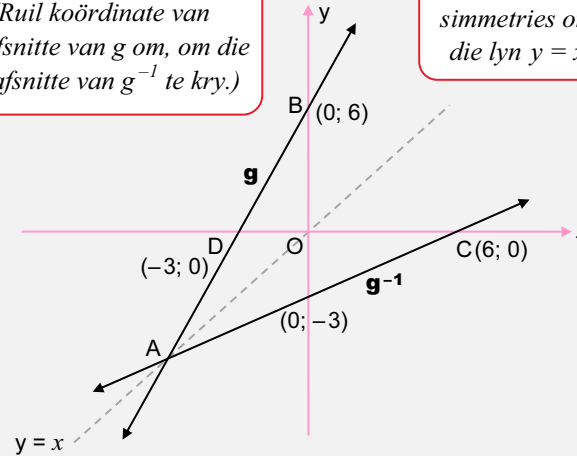
### Memo

5.1  $y_B = 6$  <

5.2 Vergelyking van  $g^{-1}$ :  $y = \frac{1}{2}x - 3$  <

*Deur inspeksie!  
(Ruil koördinate van as-afsnitte van  $g$  om, om die as-afsnitte van  $g^{-1}$  te kry.)*

*LW:  
 $g$  en  $g^{-1}$  is simmetries om die lyn  $y = x$*



OF: Vergelyking van  $g$ :  $y = 2x + 6$

$\therefore$  Vergelyking van  $g^{-1}$ :  $x = 2y + 6$

$\therefore -2y = -x + 6$

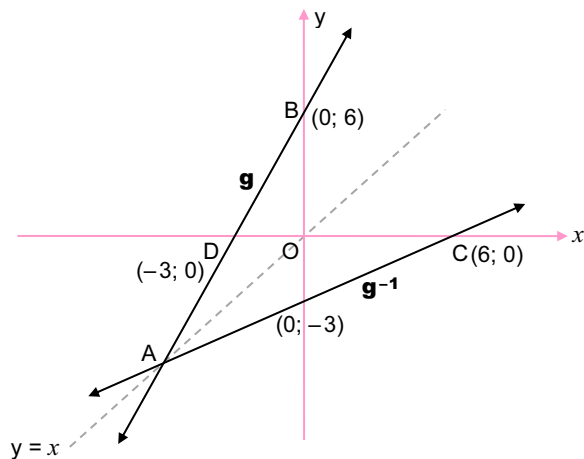
$\therefore y = \frac{1}{2}x - 3$  <



## Algemene Foute en Wanopvattinge

- (a) In **V5.2** kon die meeste kandidate  $x$  en  $y$  in die vergelyking korrek **omruil**. Sommige het egter nie vir  $y$  die **onderwerp** van die formule **gemaak** nie, terwyl ander foute gemaak het met die oorbring van die terme. Baie kandidate het nie die **verskil** in die notasies  **$g'(x)$  en  $g^{-1}(x)$**  verstaan nie.

Sommige kandidate het net eenvoudig log neergeskryf toe hulle  $g^{-1}(x)$  sien. Hulle dink die logfunksie is die inverse/ omgekeerde van alle funksies. Dit is verkeerd.



5.3 Bepaal die koördinate van A. (3)

**63%**

5.4 Bereken die lengte van AB. (2)

**69%**

### Memo

5.3 By A:  $y = \frac{1}{2}x - 3$  en  $y = 2x + 6$

$$\therefore \frac{1}{2}x - 3 = 2x + 6$$

$$\therefore -\frac{3}{2}x = 9$$

$$\times \left(-\frac{2}{3}\right) \quad \therefore x = -6$$

$$\& \quad y = 2(-6) + 6 = -6$$

$$\therefore \mathbf{A(-6; -6) \leftarrow}$$



5.4  $AB^2 = (6 + 6)^2 + (0 + 6)^2$   
 $= 144 + 36$   
 $= 180$

$$\therefore AB = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \approx \mathbf{13,42 \text{ eenhede} \leftarrow}$$

(b) Met die beantwoording van **V5.3** het baie kandidate die **afsnitte** met die asse bereken **in plaas daarvan** om die **snypunt** van die twee lyne te bereken. Baie kandidate het nie enige berekening getoon nie, maar net eenvoudig verkeerde koördinate van A neergeskryf, asof hulle dit van die grafiek afgelees het.





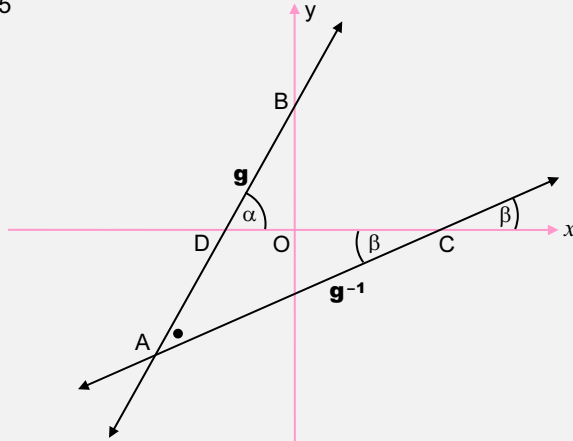
5.5 Bereken die oppervlakte van  $\triangle ABC$ .

32%

(5)  
[13]

**Memo**

5.5



$m_{AB} = 2 \rightarrow \alpha = 63,434\dots^\circ$

$m_{AC} = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = 26,565\dots^\circ$

$\therefore \hat{BAC} = \alpha - \beta = 36,869\dots$

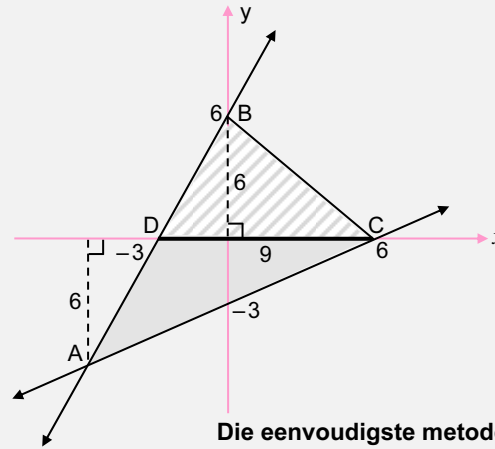
Die oppervlakte van  $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \hat{BAC}$

waar  $AC = AB = \sqrt{180}$

$\therefore$  Oppv. van  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{180} \sqrt{180} \sin 36,869\dots^\circ = 54 \text{ eenhede}^2 \leftarrow$



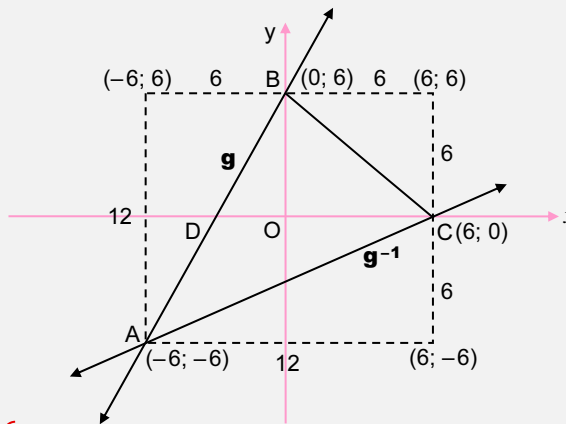
OF:



Die eenvoudigste metode!



Oppv. van  $\triangle ABC$   
 $= \triangle ADC + \triangle BDC$   
 $= \frac{1}{2} (9)(6) + \frac{1}{2} (9)(6)$   
 $= 54 \text{ eenhede}^2 \leftarrow$



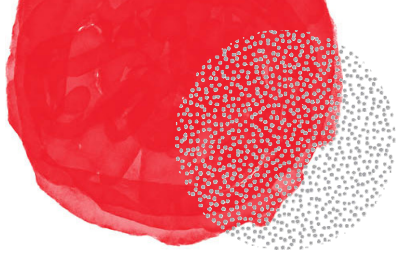
OF: Oppervlakte van  $\triangle ABC$   
 $= (12 \times 12) - \frac{1}{2} (12 \times 6) - \frac{1}{2} (6 \times 6) - \frac{1}{2} (12 \times 6)$   
 Oppervlakte van 'n vierkant & Oppervlakte van  $\triangle^e$

Daar is verskeie metodes.



(c) Baie kandidate het verkeerde aannames gemaak met die beantwoording van V5.5. Die algemeenste hiervan was om aan te neem dat AB loodreg op BC is. Sommige kandidate het die verkeerde hoek in die oppervlakformule  $A = \frac{1}{2} ab \sin C$  gebruik. Hulle het 'n inklinasiehoek in plaas van die hoek tussen die twee sye van die driehoek, gebruik.





## VRAAG 5: Voorstelle vir Verbetering



- (a) Onderwysers moet tyd spandeer om te bespreek dat **alle punte op die  $x$ -as 'n  $y$ -koördinaat van 0** het en dat **alle punte op die  $y$ -as 'n  $x$ -koördinaat van 0** het. Die **definisieversameling** is altyd 'n **stel  $x$ -waardes** en die **waardeversameling** is altyd 'n **stel  $y$ -waardes**.
- (b) Leerders moet geleer word om die **vraag te beantwoord**. Hulle moet die **koördinate** van 'n punt neerskryf indien die vraag dit van hulle verwag.
- (c) Die afdeling oor inverses lei op sigself tot 'n ondersoekende benadering in onderrig. Onderwysers moet die geleentheid gebruik om leerders toe te laat om te ontdek dat **'n funksie en sy inverse simmetries om die lyn  $y = x$**  is en dat die **snypunt, waar dit bestaan**, van 'n funksie en sy inverse **ook op die lyn  $y = x$**  sal lê.
- (d) Onderwysers moet dit beklemtoon dat die **hoogte van 'n driehoek loodreg op sy basis** is.




## VRAAG 6 57%

- 49% 6.1 R12 000 is in 'n fonds belê wat rente teen  $m\%$  p.j., kwartaalliks saamgestel, betaal het. Na 24 maande was die waarde van die belegging R13 459.
- Bepaal die waarde van  $m$ . (4)
- 66% 6.2 Op 31 Januarie 2022 het Tino R1 000 in 'n rekening gedeponeer wat rente teen  $7,5\%$  p.j., maandeliks saamgestel het. Hy het aangehou om R1 000 op die laaste dag van elke maand te deponeer. Hy sal die laaste deposito op 31 Desember 2022 maak.
- Sal Tino op 1 Januarie 2023 genoeg geld in die rekening hê om 'n rekenaar wat R13 000 kos, te kan koop? Motiveer jou antwoord deur 'n toepaslike berekening te gebruik. (4)

### Memo

6.1  $13\,459 = 12\,000 \left(1 + \frac{m\%}{4}\right)^{2 \times 4}$   **$A = P(1 + i)^n$**

$$\therefore \frac{13\,459}{12\,000} = \left(1 + \frac{m\%}{4}\right)^8$$
$$\therefore 4 \left(\sqrt[8]{\frac{13\,459}{12\,000}} - 1\right) = m\%$$
$$\therefore m\% = 5,78\% \leftarrow$$

6.2  **$F_v = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$**  

$$= \frac{1\,000 \left[ \left(1 + \frac{7,5\%}{12}\right)^{12} - 1 \right]}{\frac{7,5\%}{12}}$$
$$= R12\,421,22$$

$\therefore$  Tino sal nie genoeg fondse hê nie.  $\leftarrow$

## Algemene Foute en Wanopvattinge

- (a) In **V6.1** het sommige kandidate die **formule vir enkelvoudige rente** in plaas van die **formule vir saamgestelde rente** gebruik. Baie kandidate het die **verkeerde waarde van  $n$**  in die formule vir saamgestelde rente gebruik. Hulle het 4, 12 of 24 as die waarde van  $n$  gebruik, in plaas van 8.

33% 6.3 Thabo beplan om 'n kar wat R250 000 kos, te koop. Hy sal 'n deposito van 15% betaal en 'n lening vir die balans uitneem. Die rente op die lening is 13% p.j., maandeliks saamgestel.

6.3.1 Bereken die waarde van die lening. (1)

6.3.2 Die eerste terugbetaling sal gemaak word 6 maande nadat die lening toegestaan is. Die lening sal oor 'n tydperk van 6 jaar nadat dit toegestaan is, afbetaal word. Bereken die MAANDELIKSE paaiement. (5)

[14]

### Memo

6.3.1 15% of 250 000 = R37 500  
 $\therefore 250\,000 - 37\,500 = \mathbf{R212\,500} \leftarrow$

6.3.2 13% p.j. maandeliks

$$P_v = \frac{x \left[ 1 - (1+i)^{-n} \right]}{i}$$



$$212\,500 = \frac{x \left[ 1 - \left( 1 + \frac{13\%}{12} \right)^{-(6 \times 12 - 5)} \right]}{\frac{13\%}{12}} \cdot \left( 1 + \frac{13\%}{12} \right)^{-5}$$

$$x = \mathbf{R4\,724,96} \leftarrow$$

$$\text{OF: } 212\,500 \left( 1 + \frac{0,13}{12} \right)^5 = \frac{x \left[ 1 - \left( 1 + \frac{0,13}{12} \right)^{-67} \right]}{\frac{0,13}{12}}$$

$$x = \mathbf{R4\,724,96} \leftarrow$$

$$\text{OF: } 212\,500 \left( 1 + \frac{0,13}{12} \right)^{72} = \frac{x \left[ \left( 1 + \frac{0,13}{12} \right)^{67} - 1 \right]}{\frac{0,13}{12}}$$

$$x = \mathbf{R4\,724,96} \leftarrow$$

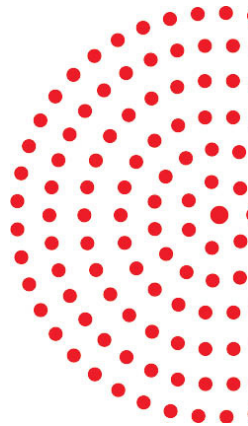
(b) Baie kandidate het nie in ag geneem dat **V6.3.2** op 'n **uitgestelde betaling** gebaseer is nie. Gevolglik het hulle nie **rente by die aanvanklike leningsbedrag bygetel nie**. Algemene foute was:

$$212\,500 = \frac{x \left[ 1 - \left( 1 + \frac{0,13}{12} \right)^{-72} \right]}{\frac{0,13}{12}}$$

of

(Sien memo)

$$212\,500 = \frac{x \left[ 1 - \left( 1 + \frac{0,13}{12} \right)^{-67} \right]}{\frac{0,13}{12}}$$



## VRAAG 6: Voorstelle vir Verbetering



- (a) Leerders het **dieper insig nodig** in die **toepaslikheid van elk van die formules** en **onder watter omstandighede** elkeen gebruik kan word. Die **veranderlikes** in elke formule moet verduidelik word. Meer oefening oor Finansiële Wiskunde is nodig sodat leerders kan identifiseer wanneer om die verskillende formules te gebruik.
- (b) Onderwysers moet al die stappe wat nodig is wanneer met 'n **sakrekenaar** gewerk word, demonstree. Leerders moet in formele assesseringstake by die skool **gepenaliseer word indien hulle vroegtydig afrond**.
- (c) Die **verskil** tussen **saamgestelde rente** en **toekomstige waarde-annuïteite** moet verduidelik word.
- (d) Die **korrekte** Finansiële Wiskunde-**taal** moet in die klaskamer gebruik word en leerders moet die vraag **met begrip lees**.
- (e) Onderwysers moet leerders aan die **verskillende scenario's** vir terugbetalings van lenings, nl. **uitgestelde betalings**, **oorgeslaande betalings**, **uitstaande saldo onmiddellik na 'n sekere aantal betalings**, **finale betaling**, ens., blootstel.

## VRAAG 7 61%

7.1 Bepaal  $f'(x)$  vanuit eerste beginsels indien  
**76%**  $f(x) = x^2 + x$ . (5)

7.2 Bepaal  $f'(x)$  indien  $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 8x$ . (3)  
**88%**

### Memo

7.1  $f(x) = x^2 + x$   
 $\therefore f(x+h) = (x+h)^2 + x+h$   
 $= x^2 + 2xh + h^2 + x + h$   
 $\therefore f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2 + h$   
 $\therefore \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2 + h}{h}$   
 $= 2x + h + 1$   
 $\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1)$   
 $= 2x + 1 <$

7.2  $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 8x$   
 $\therefore f'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 8 <$

## Algemene Foute en Wanopvatting

(a) In **V7.1** het sommige kandidate die volgende **notasiefoute** gemaak:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{of} \quad \lim_{h \rightarrow 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Ernstige  
notasie-  
foute**

Hulle het 'n punt verloor vir hierdie foute.

Ander kandidate het **foute gemaak met substitusie**, d.w.s.:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - x^2 + x}{h} \quad \text{of} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + x - (x^2 + x)}{h}$$

Nog 'n algemene fout was **verkeerde faktorisering**, d.w.s.:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

**ALGEBRA**

7.3 Die raaklyn aan  $g(x) = ax^3 + 3x^2 + bx + c$  het 'n minimum helling (gradiënt) by die punt  $(-1; -7)$ .

22%

Vir watter waardes van  $x$  sal  $g$  konkaf op wees? (4) [12]



### Memo

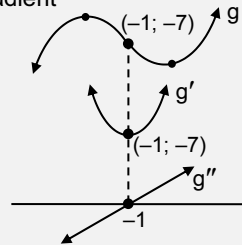
7.3  $g(x) = ax^3 + 3x^2 + bx + c$

Die gradiënt van die raaklyn aan  $g$   
 $= g'(x) = 3ax^2 + 6x + b$

& die minimum van hierdie gradiënt  
 kom voor wanneer  $x = -1$

$\therefore g$  sal konkaf op wees  
 vir  $x > -1$   $\blacktriangleleft$

(LW: Dit is waar  
 $g''(x) > 0$ )



OF:

$$g(x) = ax^3 + 3x^2 + bx + c$$

$$\therefore g'(x) = 3ax^2 + 6x + b$$

$$\therefore g''(x) = 6ax + 6$$

$$\therefore 0 = 6a(-1) + 6$$

$$\therefore 6a = 6$$

$$\therefore a = 1$$

$$g''(x) = 6x + 6 \Rightarrow g''(x) > 0$$

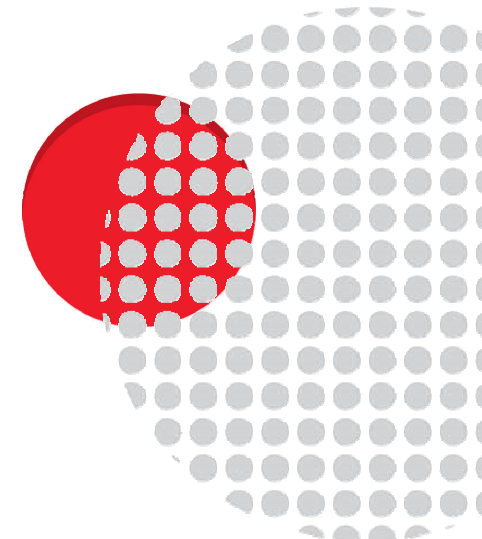
$$\therefore 6x + 6 > 0$$

$$\therefore 6x > -6$$

$$\therefore x > -1 \quad \blacktriangleleft$$



(b) Met die beantwoording van **V7.3**, het baie kandidate die eerste en tweede afgeleides korrek bereken. Hulle het egter die **substitusie/instel** in die tweede afgeleide **verkeerd** gedoen, d.w.s.  $6a(-1)^2 + 6 = -7$ . Hulle het die waarde van die **tweede afgeleide** by die buig-/infleksiepoint met die **minimum gradiënt van die raaklyn verwar**.



## VRAAG 7: Voorstelle vir Verbetering



- (a) Daar moet klem geplaas word op die gebruik van die **korrekte notasie** wanneer die afgeleide bepaal word, óf deur die gebruik van eerste beginsels óf die reëls.
- (b) Onderwysers moet die feit dat **hakies** nodig is wanneer die afgeleide vanuit **eerste beginsels** bepaal word, verduidelik. Dit verhoed die verkeerde vereenvoudiging wat volg.
- (c) Die **konsepte** van **gradiënt van raaklyn** en **buigpunt** moet verstaan word. Onderwysers moet **die verskil** tussen die twee konsepte **verduidelik**.
- (d) Met die onderrig van derdegraadse funksies moet die **fokus** nie net op die berekening van kritieke punte wees nie, maar ook op die **interpretering** van **die kritieke punte** op die grafiek.

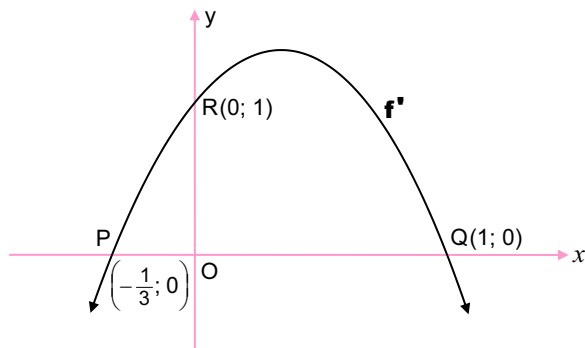




## VRAAG 8 43%

Die grafiek van  $y = f'(x) = mx^2 + nx + k$  is hieronder geteken.

Die grafiek gaan deur die punte  $P(-\frac{1}{3}; 0)$ ,  $Q(1; 0)$  en  $R(0; 1)$ .



8.1 Bepaal die waardes van  $m$ ,  $n$  en  $k$ . (6)

49%

### Memo

8.1  $k = 1$  ...  $y$ -afsnit

$$\& y = m\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) \quad \dots \text{wortels } -\frac{1}{3} \& 1$$

$$\therefore y = m\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$$

Stel  $(0; 1)$  in

$$\therefore 1 = m\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore m = -3 \leftarrow$$

$$\therefore \text{Die vergelyking is: } y = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore y = -3x^2 + 2x + 1$$

$$\therefore n = 2 \leftarrow$$

$$\& k = 1 \leftarrow$$



## Algemene Foute en Wanopvattinge

- (a) Baie kandidate **het nie** besef dat **V8.1** van hulle verwag om **die vergelyking van 'n parabool, gegewe twee  $x$ -afsnitte en 'n punt op die parabool, te bepaal** nie. Sommige kandidate het aangeneem dat  $m$ ,  $-1$  was, omdat die parabool 'n maksimum draaipunt gehad het. 'n Paar kandidate het die funksie wat in V8.2 gegee is, gebruik om die waardes van  $m$ ,  $n$  en  $k$  te bereken. Hulle het geen punte hiervoor gekry nie.

8.2 Indien dit verder gegee word dat  $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$ :  
**50%**

8.2.1 Bepaal die koördinate van die draaipunte van  $f$ . (3)

### Memo

8.2.1

DP'e van  $f$  is by  $x = -\frac{1}{3}$  en  $x = 1$   
... waar die afgeleide,  $f'(x)$ , nul is.



$$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$$

$$\begin{aligned}\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \\ &= \frac{49}{27} \\ &= 1,81 \text{ of } 1\frac{22}{27}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\& f(1) = -(1)^3 + (1)^2 + (1) + 2 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Die draaipunte: } \left(-\frac{1}{3}; 1,81\right) \& (1; 3) \leftarrow$$

(b) In **V8.2.1** het baie kandidate die  $x$ -koördinate van die draaipunte bereken deur differensiasie van die gegewe derdegraadse funksie in plaas daarvan om dit van die gegewe grafiek af te lees. Hierdie kandidate kon nie die gegewe parabool en die eerste afgeleide van die derdegraadse funksie met mekaar in verband bring nie.

8.2.2 Skets die grafiek van  $f$ . Dui die koördinate van die draaipunte en die afsnitte met die asse op jou grafiek aan. (5)

### Memo

8.2.2 Die Y-afsnit ( $x = 0$ ):  $f(0) = 2 \quad \therefore (0; 2) \leftarrow$

Die X-afsnit ( $y = 0$ ):  $-x^3 + x^2 + x + 2 = 0$

$$\therefore x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

Vir  $x^2 + x + 1$

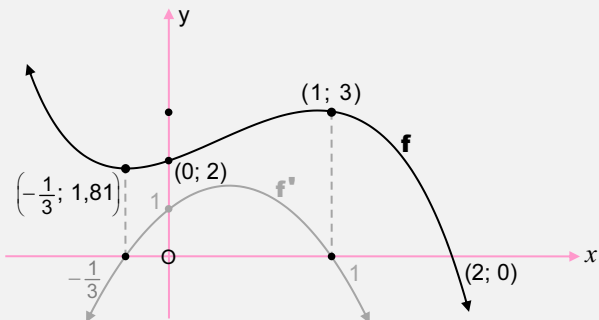
$$\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3$$

$$\therefore (x-2)(x^2+x+1) = 0 \quad \dots f(2) = 0$$

$$\therefore x = 2$$

$\Delta < 0 \rightarrow$  'geen wortels'

$\therefore (2; 0) \leftarrow$



(c) In **V8.2.2** kon baie kandidate nie daarin slaag om die  $x$ -afsnitte van die derdegraadse funksie te bereken nie en was gevolglik nie in staat om die derdegraadse grafiek korrek te teken nie.

8.3 Punte E en W is twee veranderlike punte op  $f'$  en is op dieselfde horisontale lyn.

12%

- h is 'n raaklyn aan  $f'$  by E.
- g is 'n raaklyn aan  $f'$  by W.
- h en g sny by  $D(a; b)$ .



8.3.1 Skryf die waarde van a neer. (1)

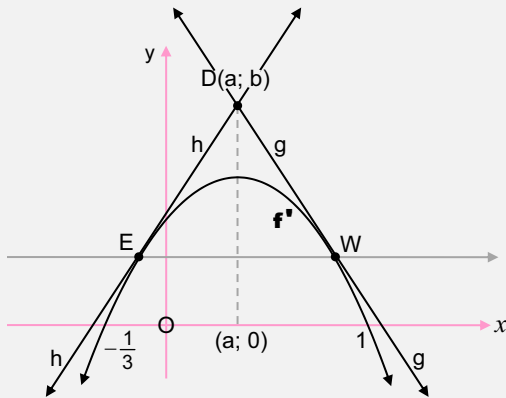
8.3.2 Geherformuleerde vraag.

Vir watter waarde(s) van b is dit onmoontlik om twee verskillende raaklyne vanaf  $D(a; b)$  tot  $f'$  te trek?

(2)  
[17]

### Memo

8.3



8.3.1  $a = \frac{-\frac{1}{3} + 1}{2} \dots$  middelpunt  
 $\therefore a = \frac{1}{3} <$



8.3.2 Draaipunt van  $f'$  is  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

$b \leq \frac{4}{3} < \dots$  Lees die geherformuleerde vraag aandagtig deur!

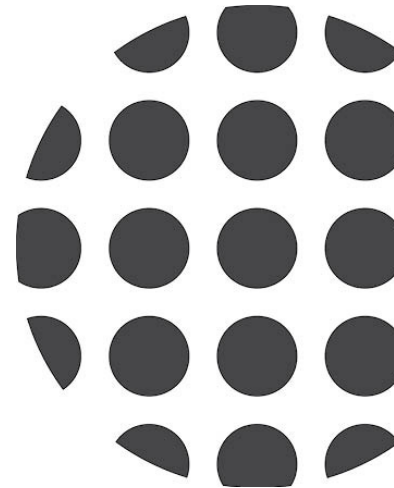
(d) **V8.3.1** en **V8.3.2** het vir baie kandidate 'n leesuitdaging ingehou.

Hulle het nie beseft dat hierdie vrae op die draaipunt van die parabool

gebaseer was nie. Hierdie vrae het dan ook nog van die kandidate

verwag om 'n grafiese interpretasie te maak. Dit was bo baie

kandidate se vuurmaakplek/vermoëns.

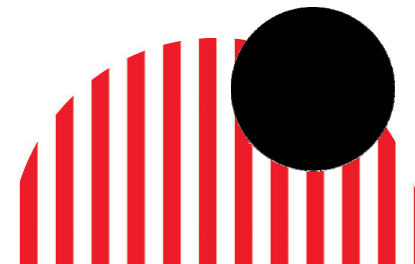


## VRAAG 8: Voorstelle vir Verbetering



- (a) Leerders moet vanaf Graad 10 tot 12 op 'n progressiewe manier geleer word om die vergelyking van 'n grafiek te bepaal.
- (b) Wanneer faktorisering van derdegraadse polinome onderrig word, moet onderwysers voorbeelde waar daar slegs een reële wortel is, insluit.
- (c) Onderwysers moet die **verband** tussen 'n **derdegraadse grafiek** en **die grafieke van sy eerste en tweede afgeleides** demonstreer.
- (d) Die toepassing van **Differensiaalrekening** lei op sigself tot baie toepassings. Onderwysers moet leerders aan 'n wye verskeidenheid vrae blootstel.

**KONKAWITEIT**



## VRAAG 9 9%

Gegee  $f(x) = x^2$ .

Bepaal die minimum afstand tussen die punt (10; 2) en 'n punt op f.

[8]

### Memo

9. Punte op f is  $(x; x^2)$

Die afstand tussen (10; 2) &  $(x; x^2)$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(x-10)^2 + (x^2-2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 20x + 100 + x^4 - 4x^2 + 4} \\ &= \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104} \end{aligned}$$

Om die minimum van  $\sqrt{A}$  te vind, kan ons die minimum van A vind, want hoe kleiner A is, hoe kleiner is  $\sqrt{A}$ . Die minimum kom dus voor wanneer die afgeleide van wat onder die wortelteken is gelyk aan 0 is.

$$\therefore 4x^3 - 6x - 20 = 0$$

$$\therefore 2x^3 - 3x - 10 = 0$$

Dit is waar wanneer  $x = 2$  ... probeer en tref

$$\therefore 2x^3 - 3x - 10$$

$$= (x-2)(2x^2 \dots + 5)$$

$$= (x-2)(2x^2 + 4x + 5)$$

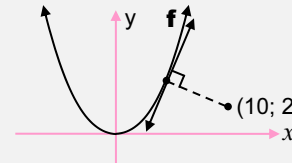
$$\begin{aligned} &\text{Vir } 2x^2 + 4x + 5: \\ &\Delta = 4^2 - 4(2)(5) = -24 \\ &\& \Delta < 0 \rightarrow \text{'geen wortels'} \end{aligned}$$

$\therefore x = 2$  is die enigste reële wortel van hierdie vergelyking

$\therefore$  Die punt is (2; 4)

$$\begin{aligned} \therefore \text{Die minimum afstand} &= \sqrt{(2-10)^2 + (4-2)^2} \\ &= \sqrt{64 + 4} \\ &= \sqrt{68} \\ &= 2\sqrt{17} \\ &\approx \mathbf{8,25 \text{ eenhede} \leftarrow} \end{aligned}$$

OF: Die kortste lyn getrek Van (10; 2) tot f is die loodlyn op die raaklyn by daardie punt.



Die gradiënt van die raaklyn =  $f'(x) = 2x$

& Die gradiënt van die lyn is  $\frac{x^2-2}{x-10}$

$$\therefore 2x \times \frac{x^2-2}{x-10} = -1 \quad \dots \text{produkt van die gradiënte} = -1$$

$$\therefore 2x(x^2-2) = -x+10$$

$$\therefore 2x^3 - 4x + x - 10 = 0$$

$$\therefore 2x^3 - 3x - 10 = 0, \text{ ens. (soos hierbo)}$$

## Algemene Foute en Wanopvattinge

**Enige punt op f is  $(x; x^2)$**

Die oorgrote meerderheid van die kandidate het nie 'n poging aangewend om hierdie vraag te beantwoord nie omdat hulle **nie die afstandsfunksie** uit die gegewe inligting **kon bepaal nie**. Sommige kandidate het 'n probeer-en-trefmetode gebruik om die **minimum afstand** tussen die punte te **verkry**. Hulle het geen punte daarvoor gekry nie.

## VRAAG 9: Voorstelle vir Verbetering



(a) Dit lyk asof leerders van formules wat gegee word afhanklik is wanneer dit by die oplos van optimeringsomme kom.

Dit is raadsaam dat leerders die optimumfunksie bevraagteken al word dit in 'n vraag gegee. Dit sal help met leerders se begripsontwikkeling.

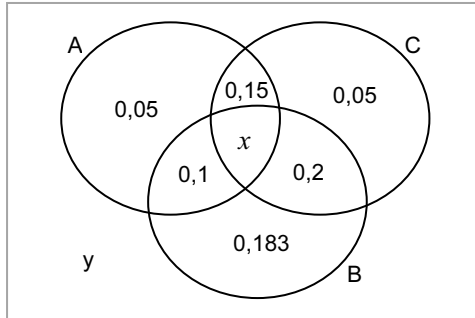
(b) Onderwysers moet seker maak dat daar genoeg tyd is vir leerders om die toepassing van Differentiaalrekening te verstaan.

(c) Leerders moet deurlopend **met begrip lees** indien hulle hul reaksies op **woordsomme** wil verbeter.

## VRAAG 10 21%

- 10.1 A, B en C is drie gebeurtenisse. Die waarskynlikheid dat hierdie gebeurtenisse (of enige kombinasie daarvan) sal plaasvind, word in die Venn-diagram hieronder gegee.

25%



- 10.1.1 Indien daar gegee word dat die waarskynlikheid dat ten minste een van die gebeurtenisse sal plaasvind, 0,893 is, bereken die waarde van:
- (a)  $y$ , die waarskynlikheid dat nie een van hierdie gebeurtenisse sal plaasvind nie. (1)
- (b)  $x$ , die waarskynlikheid dat al drie gebeurtenisse sal plaasvind. (1)

### Memo

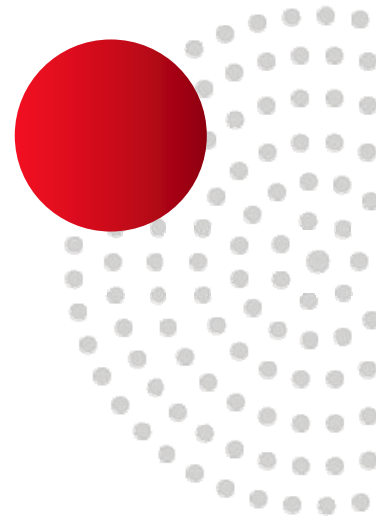
- 10.1.1 (a)  $y$ , die waarskynlikheid dat nie een van die gebeurtenisse sal plaasvind nie.
- =  $1$  – die waarskynlikheid dat ten minste een van die gebeurtenisse sal plaasvind.
- ... *komplementêre gebeurtenisse*
- =  $1 - 0,893$
- = **0,107** <
- (b) Die **som** van al die waarskynlikhede is **1**
- $\therefore x + 0,05 + 0,1 + 0,15 + 0,2 + 0,05 + 0,183 + 0,107 = 1$
- $\therefore x = 1 - 0,84$
- = **0,16** <

Merk elkeen af soos jy dit inskryf!

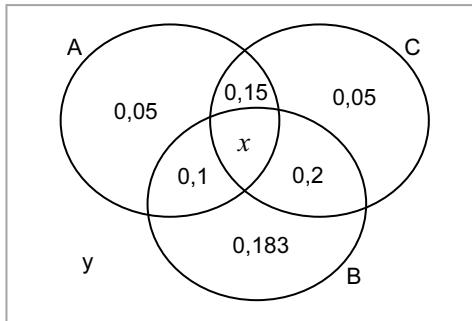


## Algemene Foute en Wanopvattinge

- (a) Baie kandidate het nie besef dat die waarskynlikheid dat ten minste een van die drie gebeurtenisse sal plaasvind 0,893 is, die som van die waarskynlikhede van al die areas wat deur die drie sirkels omsluit word, voorgestel het nie. Hulle kon dus nie **V10.1.1(a)** en **V10.1.1(b)** korrek beantwoord nie.







- 10.1.2 Bepaal die waarskynlikheid dat ten minste twee van die gebeurtenisse sal plaasvind. (2)
- 10.1.3 Is gebeurtenisse B en C onafhanklik? Motiveer jou antwoord. (5)

### Memo

10.1.2  $P(\text{ten minste 2 gebeurtenisse sal plaasvind})$   
 $= 0,1 + 0,16 + 0,15 + 0,2$   
 $= \mathbf{0,61} \leftarrow$

10.1.3  $P(B \text{ en } C) = x + 0,2 = 0,16 + 0,2 = 0,36$   
 &  $P(B) \times P(C) = (0,1 + 0,16 + 0,183 + 0,2) \times (0,16 + 0,15 + 0,2 + 0,05)$   
 $= 0,643 \times 0,56$   
 $= 0,36008$

$\therefore P(B \text{ en } C) \neq P(B) \times P(C)$

$\therefore$  **Gebeurtenisse B en C is nie onafhanklik nie**  $\leftarrow$

#### Let wel:

Afronding van desimale word slegs gedoen **indien nodig** (wat nie hier die geval is nie).

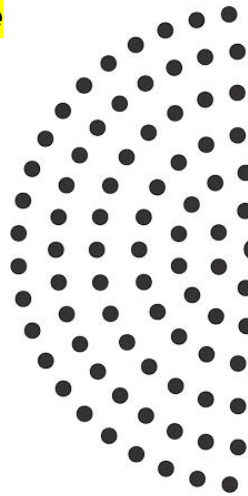
Daar kan egter geargumenteer word dat, wanneer soos gewoonlik afgerond word, is  $P(B \text{ en } C) = P(B) \times P(C)$   
 $\dots = 0,36$

& dan is gebeurtenisse B en C onafhanklik  $\leftarrow$



(b) In die beantwoording van **V10.1.2** was baie kandidate **nie in staat** om **die areas** in die diagram, **wat die voorwaarde van ten minste twee gebeurtenisse bevredig**, korrek **te identifiseer nie**.

(c) In **V10.1.3** het 'n aantal kandidate **P(A)**, in plaas van **P(C)**, van die skets **afgelees**. Hulle het verder gegaan om die onafhanklikheid van gebeurtenisse A en B, in plaas van gebeurtenisse B en C, te toets. Sommige kandidate het **P(B)** met **P(slegs B)** verwar en die waarde van P(B) verkeerdelik as 0,183 geneem.



10.2 'n Viersyferkode word benodig om 'n kombinasieslot oop te maak. Die kode moet 'n ewe getal wees en mag nie die syfers 0 of 1 bevat nie. Syfers mag nie herhaal word nie.

17%

10.2.1 Hoeveel moontlike 4-syfer-kombinasies is daar om die slot oop te maak? (3)

10.2.2 Bereken die waarskynlikheid dat jy die slot met die eerste poging sal oopmaak as daar gegee word dat die kode groter as 5 000 is en dat die derde syfer 2 is. (5)  
[17]

TOTAAL: 150

### Memo

10.2  $\overbrace{7 \ 6 \ 5 \ 4}^{\substack{\uparrow \\ 2, 4, 6, 8}}$  2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9  
(8)

10.2.1 Die aantal moontlike 4-syfer kombinasies  
 $= 7 \times 6 \times 5 \times 4$   
 $= 840 \leftarrow$

10.2.2

5 syfers  $\geq 5 \rightarrow \frac{5}{5, 6, 7, 8, 9}$   $\frac{5}{3, 5, 6, 7, 8, 9}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{4}$  (25) ewe  
 geen herhalings nie

Kan nie 6 gebruik nie  $\rightarrow \frac{4}{5, 7, 8, 9}$   $\frac{5}{3, 4, 5, 7, 8, 9}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{6}$  (20) ewe  
 geen herhalings nie

Kan nie 8 gebruik nie  $\rightarrow \frac{4}{5, 6, 7, 9}$   $\frac{5}{3, 4, 5, 6, 7, 9}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{8}$  (20) ewe  
 geen herhalings nie  
 $\uparrow$   
 3<sup>de</sup> syfer is 2

$\therefore$  Die aantal verskillende maniere  
 $= (5 \times 5 \times 1 \times 1) + (4 \times 5 \times 1 \times 1) + (4 \times 5 \times 1 \times 1)$   
 $= 25 + 20 + 20$   
 $= 65$

$\therefore$  Die waarskynlikheid vir hierdie kombinasie  
 $= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{65} \leftarrow$

- (d) Baie kandidate was nie in staat om **V10.2.1** en **V10.2.2** korrek te beantwoord nie omdat hulle **nie in staat was om die beperkings wat op die syfers geplaas is, in berekening te bring nie.** Die probleem is vererger deur **die feit dat die syfers nie herhaal mag word nie.**

## VRAAG 10: Voorstelle vir Verbetering



- (a) Om **basiese konsepte** te onderrig, kan nie oor die hoof gesien word nie. Wanneer leerders die basiese konsepte goed genoeg verstaan, is dit makliker om die meer ingewikkelde konsepte te begryp.
- (b) Dit moet benadruk word dat die **waarskynlikheid van 'n gebeurtenis A** in die interval  $0 \leq P(A) \leq 1$  lê.
- (c) Om met **begrip te lees** moet gereeld in die klaskamer geoefen word. Dit behoort leerders met die vaardighede om woordsomme in assesseringstake te kan hanteer, toe te rus.
- (d) **Gebruik Venn-diagramme om waarskynlikheid te onderrig.** Dit help met die begrip van die verskillende areas wat die gebeurtenisse uitmaak, bv. slegs A, slegs B, A en B, A of B, nie A, nie B, nie A en nie B en nie A of nie B.
- (e) Leer leerders die **Basiese Telbeginsel** op so 'n manier dat hulle in staat sal wees om hul antwoorde op hul **beredenering**, eerder as op die reël, te grond.